SULLE

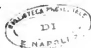
FORME TERNARIE QUADRATICHE

MEMORIA SECONDA

DI

GIUSEPPE BATTAGLINI





NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
Pignatelli a san Giovanni maggiore
1867

Memoria estratta dal Vol. III. degli Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche





In continuazione della precedente Memoria sullo stesso argomento, passiamo ora a considerare il sistema di due forme ternarie quadratiche.

1. *Serie di quadriche, semplice e di primo grado.* Siano le due coppie di quadriche congiunte (U', u'), (U'', u'') espresse in notazione ombrale da

$$(1) \qquad U' = (A'_1 s_1 + A'_2 s_2 + A'_3 s_3)^2 , \qquad u' = (a'_1 S_1 + a'_2 S_2 + a'_3 S_3)^2 ,$$
$$U'' = (A''_1 s_1 + A''_2 s_2 + A''_3 s_3)^2 , \qquad u'' = (a''_1 S_1 + a''_2 S_2 + a''_3 S_3)^2 ;$$

ponendo

$$U = \sigma' U' + \sigma'' U'' , \qquad u = \Sigma' u' + \Sigma'' u'' ,$$

alle quadriche U o u, variando $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$, apparterranno sempre i quattro elementi s comuni ad (U', U'') o i quattro elementi S comuni ad (u', u''). Diremo che le quadriche U o u costituiscono una *serie semplice di primo grado;* la serie è definita da (U', U'') o (u', u''), ed ogni quadrica U o u della serie è determinata dal valore del rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$; questo rapporto ha un solo valore allorchè si assegna un elemento s o S che debba appartenere ad U o u.

Tra le quadriche U o u della serie ve ne sono tre che si riducono a coppie di elementi S o s; se (q_1, q_2, q_3, q_4) o (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) sono i quattro elementi s o S comuni alle quadriche U o u, le suddette coppie di elementi S o s saranno

$$(q_2 q_3 , q_1 q_4), (q_3 q_1 , q_2 q_4), (q_1 q_2 , q_3 q_4) \text{ o } (Q_2 Q_3 , Q_1 Q_4), (Q_3 Q_1 , Q_2 Q_4), (Q_1 Q_2 , Q_3 Q_4) ;$$

gli elementi s o S comuni ai due elementi S o s in ciascuna di queste coppie, e che indicheremo rispettivamente con (x, y, z) o (X, Y, Z), si diranno gli elementi *doppii* s o S della serie delle quadriche U o u.

I valori di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ che determinano le quadriche U o u della serie dotata di elemento doppio si otterranno eguagliando a zero il discriminante Δ o δ di U o u. Indicando con (Δ', δ'), (Δ'', δ'') i discriminanti di (U', u'), (U'', u''), e ponendo

$$(2) \quad \begin{aligned} \Psi'' &= A''_{11} \frac{d\Delta'}{dA'_{11}} + \ldots + A''_{23} \frac{d\Delta'}{dA'_{23}} + \ldots, \quad \Psi' = A'_{11} \frac{d\Delta''}{dA''_{11}} + \ldots + A'_{23} \frac{d\Delta''}{dA''_{23}} + \ldots \\ \psi'' &= a''_{11} \frac{d\delta'}{da'_{11}} + \ldots + a''_{23} \frac{d\delta'}{da'_{23}} + \ldots, \quad \psi' = a'_{11} \frac{d\delta''}{da''_{11}} + \ldots + a'_{23} \frac{d\delta''}{da''_{23}} + \ldots \end{aligned}$$

sarà

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta &= \Delta'\sigma'^3 + \Psi''\sigma'^2\sigma'' + \Psi'\sigma'\sigma''^2 + \Delta''\sigma''^3, \\ \delta &= \delta'\Sigma'^3 + \psi''\Sigma'^2\Sigma'' + \psi'\Sigma'\Sigma''^2 + \delta''\Sigma''^3, \end{aligned}$$

e si avranno le relazioni

$$(4) \quad \begin{aligned} \Psi'' &= A''_{11}a'_{11} + \ldots + 2A''_{23}a'_{23} + \ldots, \quad \Psi' = A'_{11}a''_{11} + \ldots + 2A'_{23}a''_{23} + \ldots \\ \delta' &= \Delta'^2, \quad \psi'' = \Delta'\Psi', \quad \psi' = \Delta''\Psi'', \quad \delta'' = \Delta''^2, \end{aligned}$$

o pure

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi'' &= a''_{11}A'_{11} + \ldots + 2a''_{23}A'_{23} + \ldots, \quad \psi' = a'_{11}A''_{11} + \ldots + 2a'_{23}A''_{23} + \ldots \\ \Delta' &= \delta'^2, \quad \Psi'' = \delta'\psi', \quad \Psi' = \delta''\psi'', \quad \Delta'' = \delta''^2, \end{aligned}$$

secondo che si riguardino (u', u'') come le forme congiunte di (U', U''), o viceversa (U', U'') come le forme congiunte di (u', u'').

Ponendo (per un elemento s_μ o S_μ)

$$\Theta_\mu = s_{\mu 1}\frac{d}{ds_1} + s_{\mu 2}\frac{d}{ds_2} + s_{\mu 3}\frac{d}{ds_3}, \quad \text{o} \quad \theta_\mu = S_{\mu 1}\frac{d}{dS_1} + S_{\mu 2}\frac{d}{dS_2} + S_{\mu 3}\frac{d}{dS_3},$$

sarà

$$\Theta_\mu U = \sigma'\Theta_\mu U' + \sigma''\Theta_\mu U'', \quad \theta_\mu u = \Sigma'\theta_\mu u' + \Sigma''\theta_\mu u'',$$

sicchè, l'elemento armonico S o s di s_μ o S_μ rispetto ad U o u essendo determinato dall'equazione $\Theta_\mu U = 0$, o $\theta_\mu u = 0$, al variare di $\sigma' : \sigma''$, o $\Sigma' : \Sigma''$, gli elementi armonici $\Theta_\mu U$ o $\theta_\mu u$ apparterranno sempre all'elemento s, o S, comune a $(\Theta_\mu U', \Theta_\mu U'')$ o $(\theta_\mu u', \theta_\mu u'')$. Gli elementi $\Theta_\mu U$

o $\theta_\mu u$ costituiscono una *serie semplice di primo grado* corrispondente alla serie delle quadriche U o u: queste serie al variare di s_μ o S_μ sono tra loro *equianarmoniche*, ed il rapporto anarmonico di quattro elementi in ciascuna di esse (il quale è formato con i quattro valori del rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ che li determinano) si dirà il *rapporta anarmonico delle quattra quadriche corrispondenti* U *a* u. In particolare le quattro serie costituite dagli elementi S o s congiunti alle quadriche U o u nei loro quattro elementi comuni q o Q sono tra loro equianarmoniche.

La coppia (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) è coniugata armonica rispetto a tutte le quadriche U o u della serie, e per determinarla basta conoscere i loro quattro elementi comuni q o Q; si diranno (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) elementi *coniugati armonici rispetta alla serie delle quadriche* U *a* u, o rispetto alla quaterna (q_1, q_2, q_3, q_4) o (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).

Se s_μ o S_μ coincide con uno degli elemeoti doppii (x, y, z) o (X, Y, Z) della serie delle quadriche U o u, essendo per ciascuno di essi

$$(5) \qquad \frac{U'_1}{U''_1} = \frac{U'_2}{U''_2} = \frac{U'_3}{U''_3}, \qquad \text{o} \qquad \frac{u'_1}{u''_1} = \frac{u'_2}{u''_2} = \frac{u'_3}{u''_3},$$

ognuno di quegli elementi doppii s o S avrà lo stesso elemento armonico S o s rispetto ad (U'', U') o (u', u''): segue da ciò che gli elementi (x, y, z) ed (X, Y, Z) costituiranno una medesima terna (xyz, XYZ) di elementi s ed S coniugata comune rispetto alle quadriche congiunte (U', u') ed (U'', u''), e quindi coniugata comune rispetto a tutte le quadriche U o u della serie definita da (U', U'') o (u', u'').

Essendo (s_i, s_j) o (S_i, S_j) una coppia qualunqne appartenente ad S o s, gli elementi s_ν o S_ν coniugati armonici dei diversi elenrenti s_μ o S_μ di S o s, rispetto alla serie delle quadriche U o u, apparterranno alla quadrica

$$\Theta_i U' \Theta_j U'' - \Theta_j U' \Theta_i U'', \qquad \text{o} \qquad \theta_i u' \theta_j u'' - \theta_j u' \theta_i u'',$$

alla quale può darsi ancora la forma

$$(6) \qquad V = \begin{vmatrix} U'_1, & U'_2, & U'_3 \\ U''_1, & U''_2, & U''_3 \\ S_1, & S_2, & S_3 \end{vmatrix}, \qquad \text{o} \qquad v = \begin{vmatrix} u'_1, & u'_2, & u'_3 \\ u''_1, & u''_2, & u''_3 \\ s_1, & s_2, & s_3 \end{vmatrix};$$

questa quadrica è nello stesso tempo costituita dagli elementi s o S armooici di S o s rispetto alle diverse quadriche U o u della serie.

Alla quadrica V o v appartengono i tre elementi doppii (x, y, z) o (X, Y, Z) della serie, o sia i tre elementi *diagonali* della quaterna (q_1, q_2, q_3, q_4) o (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), ed inoltre i sei elementi s o S armonici di S o s rispetto alle coppie degli elementi della medesima quaterna combinati a due a due; si dice perciò V o v la quadrica dei *nove elementi* rispetto alla quaterna (q_1, q_2, q_3, q_4) o (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) ed all'elemento S o s.

La coppia (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) degli elementi comuni a V ed S o v ed s è coniugata armonica rispetto alla serie delle quadriche U o u, sicchè le coppie degli elementi comuni ad S o s ed alle diverse quadriche U o u costituiscono un' *involuzione* che ha per elementi doppii (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν); le quadriche della serie si dicono perciò in *involuzione*.

Pel modo nol quale si è pervenuto alla quadrica V o v (la quale può rappresentare evidentemente una quadrica qualunque) si fa manifesto che essa è costituita dagli elementi s o S comuni agli elementi corrispondenti S o s di due serie equianarmoniche; adunque una quadrica qualunque può considerarsi come costituita da tutti gli elementi s o S che determinano, con quattro suoi elementi fissi, gruppi di quattro elementi S o s tra loro equianarmonici.

Finora si è supposto che gli elementi q o Q comuni alle quadriche (U', U'') o (u', u'') siano tra loro distinti; se due o tre degli elementi q o Q coincidono in un solo, anche due o tre degli elementi Q o q coincideranno in un solo, e con tale elemento coincideranno due tra, o tutti o tre, gli elementi doppii s o S della serie: se poi due tra gli elementi q coincidono in m, e gli altri due in n, due tra gli elementi Q coincideranno in M, e gli altri due in N, o viceversa, sicchè saranno (m, M), (n, N) coppie di elementi congiunti comuni alle quadriche (U', u'), (U'', u''); in tal caso gli elementi doppii s o S della serie saranno MN o mn, o tutti gli elementi appartenenti ad mn o MN.

2. *Invarianti del sistema di due quadriche.* Riprendiamo le formole (3) del numero precedente

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Delta &= \Delta'\sigma'^3 + \Psi''\sigma'^2\sigma'' + \Psi'\sigma'\sigma''^2 + \Delta''\sigma''^3 , \\ \delta &= \delta'\Sigma'^3 + \psi''\Sigma'^2\Sigma'' + \psi'\Sigma'\Sigma''^2 + \delta''\Sigma''^3 ; \end{aligned}$$

i valori di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ che si ricavano dall'oquazione $\Delta = 0$, o $\delta = 0$, essendo quelli per i quali la quadrica U o u della serie, definita da (U', U'') o (u', u''), si docompone in due fattori lineari, quei valori saranno indipendenti dalla terna fondamentale alla quale si riferisce il si-

stema; i coefficienti delle formole (1) sono perciò *invarianti* del sistema delle quadriche (U', u'), (U'', u''). Per mezzo di questi invarianti si possono esprimere tutte quelle relazioni fra le due quadriche, che sono indipendenti dalla terna fondamentale.

Indichiamo con (U_x, U_y, U_z) o (u_X, u_Y, u_Z) le quadriche U o u della serie, che hanno l'elemento doppio (x, y, z) o (X, Y, Z), ed essendo (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) una coppia qualunque coniugata rispetto alla serie, siano rispettivamente (S_x, S_y, S_z, S', S'') o (s_X, s_Y, s_Z, s', s'') gli elementi armonici di s_μ o S_μ rispetto alle quadriche (U_x, U_y, U_z, U', U'') o (u_X, u_Y, u_Z, u', u''), i quali elementi appartengono evidentemente ad s_ν o S_ν. Le radici $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ dell'equazione $\Delta = 0$, o $\delta = 0$ saranno i rapporti

$$\frac{p.S_x S''}{p.S_x S'}, \quad \frac{p.S_y S''}{p.S_y S'}, \quad \frac{p.S_z S''}{p.S_z S'}; \qquad \text{o} \qquad \frac{P.s_X s''}{P.s_X s'}, \quad \frac{P.s_Y s''}{P.s_Y s'}, \quad \frac{P.s_Z s''}{P.s_Z s'}.$$

Le proprietà delle forme binarie cubiche *), applicate alle forme Δ, δ, conducono a stabilire il significato dell'annullarsi degl'invarianti nel sistema di due forme ternarie quadratiche, nel modo seguente.

L'elemento armonico di 1° ordine di S' o S'' rispetto alla terna (S_x, S_y, S_z) essendo determinato da

$$3\Delta'\sigma' + \Psi''\sigma'' = 0, \qquad \text{o} \qquad 3\Delta''\sigma'' + \Psi'\sigma' = 0,$$

esso coinciderà con S'' o S' secondo che si ha la condizione

$$(2) \qquad \Psi'' = 0, \qquad \text{o} \qquad \Psi' = 0.$$

Similmente l'elemento armonico di 1° ordine di s' o s'' rispetto alla terna (s_X, s_Y, s_Z) essendo determinato da

$$3\delta'\Sigma' + \psi''\Sigma'' = 0, \qquad \text{o} \qquad 3\delta''\Sigma'' + \psi'\Sigma' = 0,$$

esso coinciderà con s'' o s' secondo che si ha la condizione

$$(2) \qquad \psi'' = 0, \qquad \text{o} \qquad \psi' = 0.$$

Le due relazioni $\Psi' = 0$, $\psi'' = 0$, o pure $\Psi'' = 0$, $\psi' = 0$, sono l'una conseguenza dell'altra.

*) *Nota sulle forme binarie di 3° grado*. Rendiconto dell'Accademia 1864.

I due elementi armonici di 2° ordine di S' o S'' rispetto alla terna (S_x, S_y, S_z) essendo determinati da

$$3\Delta'\sigma'^2+2\Psi''\sigma'\sigma''+\Psi'\sigma''^2=0\,, \qquad \text{o} \qquad 3\Delta''\sigma''^2+2\Psi'\sigma''\sigma'+\Psi''\sigma'^2=0\,,$$

se essi coincidono tra loro (e quindi con l'elemento armonico di 1° ordine di S' o S'' rispetto alla medesima terna) si avrà la condizione

$$(3) \qquad \Psi''^2-3\Delta'\Psi'=0\,, \qquad \text{o} \qquad \Psi'^2-3\Delta''\Psi''=0\,;$$

in tal caso S' o S'' determina con la terna (S_x, S_y, S_z) un gruppo *equianarmonico*. Se poi la prima coppia di elementi armonici di 2° ordine è coniugata armonica con la seconda si avrà la relazione

$$(4) \qquad \Psi'\Psi''-9\Delta'\Delta''=0\,;$$

questa equazione esprime ancora la condizione affinchè gli elementi armonici di 1° ordine di S' ed S'' rispetto alla terna (S_x, S_y, S_z) siano tra loro coincidenti, o in altri termini affinchè S' ed S'' siano gli elementi armonici di 2° ordine di uno stesso elemento rispetto alla medesima terna.

Similmente i due elementi armonici di 2° ordine di s' o s'' rispetto alla terna (s_X, s_Y, s_Z) essendo determinati da

$$3\delta'\Sigma'^2+2\psi''\Sigma'\Sigma''+\psi'\Sigma''^2=0\,, \qquad \text{o} \qquad 3\delta''\Sigma''^2+2\psi'\Sigma''\Sigma'+\psi''\Sigma'^2=0\,,$$

se essi coincidono tra loro (e quindi con l'elemento armonico di 1° ordine di s' o s'' rispetto alla medesima terna) si avrà la condizione

$$(3) \qquad \psi''^2-3\delta'\psi'=0\,, \qquad \text{o} \qquad \psi'^2-3\delta''\psi''=0\,;$$

in tal caso s' o s'' determina con la terna (s_X, s_Y, s_Z) un gruppo *equianarmonico*. Se poi la prima coppia di elementi armonici di 2° ordine è coniugata armonica con la seconda si avrà la relazione

$$(4) \qquad \psi'\psi''-9\delta'\delta''=0\,;$$

questa equazione esprime ancora la condizione affinchè gli elementi armonici di 1° ordine di s' ed s'' rispetto alla terna (s_X, s_Y, s_Z) siano tra loro coincidenti, o in altri termini affinchè s' ed s'' siano gli elementi armonici di 2° ordine di uno stesso elemento rispetto alla medesima terna.

Nei due sistemi di relazioni (3), la 1ª o la 2ª relazione di un sistema ha per conseguenza la 2ª o la 1ª relazione dell'altro sistema; le due equazioni (4) sono poi l'una conseguenza dell'altra.

Se l'elemento armonico di 1° ordine di S' o S'' rispetto alla terna (S_x, S_y, S_z) coincide con un elemento della stessa terna si avrà

$$(5) \quad 2\Psi''^3 - 9\Delta'\Psi''\Psi' + 27\Delta'^2\Delta'' = 0 \,, \quad \text{o} \quad 2\Psi'^3 - 9\Delta''\Psi'\Psi'' + 27\Delta''^2\Delta' = 0 \,;$$

allora S' o S'' determina con la terna (S_x, S_y, S_z) un gruppo *armonico*. Se poi l'elemento armonico di 1° ordine di S' o S'' rispetto alla terna (S_x, S_y, S_z) coincide con uno degli elementi armonici di 2° ordine di S'' o S' rispetto alla medesima terna sarà

$$(6) \quad \Psi''^3 - 6\Delta'\Psi''\Psi' + 27\Delta'^2\Delta'' = 0 \,, \quad \text{o} \quad \Psi'^3 - 6\Delta''\Psi'\Psi'' + 27\Delta''^2\Delta' = 0 \,.$$

Similmente se l'elemento armonico di 1° ordine di s' o s'' rispetto alla terna (s_X, s_Y, s_Z) coincide con un elemento della stessa terna si avrà

$$(5) \quad 2\psi''^3 - 9\delta'\psi''\psi' + 27\delta'^2\delta'' = 0 \,, \quad \text{o} \quad 2\psi'^3 - 9\delta''\psi'\psi'' + 27\delta''^2\delta' = 0 \,;$$

allora s' o s'' determina con la terna (s_X, s_Y, s_Z) un gruppo *armonico*. Se poi l'elemento armonico di 1° ordine di s' o s'' rispetto alla terna (s_X, s_Y, s_Z) coincide con uno degli elementi armonici di 2° ordine di s'' o s' rispetto alla medesima terna sarà

$$(6) \quad \psi''^3 - 6\delta'\psi''\psi' + 27\delta'^2\delta'' = 0 \,, \quad \text{o} \quad \psi'^3 - 6\delta''\psi'\psi'' + 27\delta''^2\delta' = 0 \,.$$

Nei due sistemi di relazioni (5) o (6) la 1ª o la 2ª relazione di un sistema ha per conseguenza la 2ª o la 1ª relazione dell'altro sistema.

Finalmente se le coppie degli elementi armonici di 2° ordine di S' ed S'' o s' ed s'' rispetto ad (S_x, S_y, S_z) o (s_X, s_Y, s_Z) hanno un elemento di comune sarà

$$(\Psi'\Psi'' - 9\Delta'\Delta'')^2 - 4(\Psi'^2 - 3\Delta''\Psi'')(\Psi''^2 - 3\Delta'\Psi') = 0 \,,$$
$$(\psi'\psi'' - 9\delta'\delta'')^2 - 4(\psi'^2 - 3\delta''\psi'')(\psi''^2 - 3\delta'\psi') = 0 \,,$$

o sia

$$(7) \quad \begin{aligned} &27\Delta'^2\Delta''^2 + 4\Delta'\Psi'^3 + 4\Delta''\Psi''^3 - \Psi'^2\Psi''^2 - 18\Delta'\Delta''\Psi'\Psi'' = 0 \,, \\ &27\delta'^2\delta''^2 + 4\delta'\psi'^3 + 4\delta''\psi''^3 - \psi'^2\psi''^2 - 18\delta'\delta''\psi'\psi'' = 0 \,, \end{aligned}$$

vale a dire si annulleranno i discriminanti di Δ e δ.

Tra le quadriche U o u della serie, definita da (U', U'') o (u', u''), ve ne sono due, per ciascuna delle quali l'elemento armonico S o s di s_μ o S_μ determina con la terna (S_x, S_y, S_z) o (s_X, s_Y, s_Z) un gruppo equianarmonico, e che si diranno le quadriche *equianarmoniche* della serie; i valori di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ corrispondenti a tali quadriche saranno dati dall'annullarsi dell'Hessiano di Δ o δ, cioè dall'una o l'altra delle equazioni

$$(8)\qquad \begin{aligned} &(\Psi''^2-3\Delta'\Psi')\sigma'^2+(\Psi'\Psi''-9\Delta'\Delta'')\sigma'\sigma''+(\Psi'^2-3\Delta''\Psi'')\sigma''^2=0\,,\\ &(\psi''^2-3\delta'\psi')\Sigma'^2+(\psi'\psi''-9\delta'\delta'')\Sigma'\Sigma''+(\psi'^2-3\delta''\psi'')\Sigma''^2=0\,. \end{aligned}$$

Tra le quadriche U o u della serie ve ne sono poi tre, per ciascuna delle quali l'elemento armonico S o s di s_μ o S_μ determina con la terna (S_x, S_y, S_z) o (s_X, s_Y, s_Z) un gruppo armonico, e che si diranno le quadriche *armoniche* della serie; i valori di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ corrispondenti a tali quadriche saranno dati dall'annullarsi del covariante cubico di Δ o δ, cioè dall'una o l'altra delle equazioni

$$(9)\qquad \begin{aligned} &(2\Psi''^3-9\Delta'\Psi'\Psi''+27\Delta'^2\Delta'')\sigma'^3+3(\Psi''^2\Psi'-6\Delta'\Psi'^2+9\Delta'\Delta''\Psi'')\sigma'^2\sigma''\\ &-3(\Psi'^2\Psi''-6\Delta''\Psi''^2+9\Delta''\Delta'\Psi')\sigma'\sigma''^2-(2\Psi'^3-9\Delta''\Psi''\Psi'+27\Delta''^2\Delta')\sigma''^3=0\,,\\ &(2\psi''^3-9\delta'\psi'\psi''+27\delta'^2\delta'')\Sigma'^3+3(\psi''^2\psi'-6\delta'\psi'^2+9\delta'\delta''\psi'')\Sigma'^2\Sigma''\\ &-3(\psi'^2\psi''-6\delta''\psi''^2+9\delta''\delta'\psi')\Sigma'\Sigma''^2-(2\psi'^3-9\delta''\psi''\psi'+27\delta''^2\delta')\Sigma''^3=0\,. \end{aligned}$$

Indicando con $12I$, $12i$ i primi membri delle equazioni (8), e con $512J$, $512j$ i primi membri delle equazioni (9), saranno I, J o i, j gl'invarianti fondamentali della forma biquadratica *) rappresentata dal gruppo di quattro elementi (S_x, S_y, S_z, S) o (s_X, s_Y, s_Z, s), sicchè dinotando con w o W la somma di due qualunque rapporti anarmonici reciproci di tal gruppo, per determinare i suoi diversi rapporti anarmonici si avrà l'una o l'altra delle equazioni

$$(10)\qquad \begin{aligned} &(w-1)^3-\frac{I^3}{27J^2}(w+2)\Big(w-\frac{5}{2}\Big)^2=0\,,\\ &(W-1)^3-\frac{i^3}{27j^2}(W+2)\Big(W-\frac{5}{2}\Big)^2=0\,. \end{aligned}$$

La coppia (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) coniugata armonica rispetto alla serie

*) *Nota sulle forme binarie di 4° grado*. Rendiconto dell'Accademia 1864.

delle quadriche U o u è arbitraria, e se le relazioni precedenti sono stabilite per una di tali coppie, varranno ancora per tutte le altre. In particolare si può supporre che (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν) coincidano tra loro, e quindi con uno qualunque dei quattro elementi q o Q comuni alle quadriche (U', U'') o (u', u''); allora gli elementi (S_x, S_y, S_z) o (s_X, s_Y, s_Z) diverranno (qx, qy, qz) o (QX, QY, QZ), e gli elementi (S', S'') o (s', s'') saranno gli elementi congiunti ad (U', U'') o (u', u'') in q o Q: segue da ciò che, indicando con s o S un elemento qualunque della quadrica U o u, l'equazione (10) servirà per determinare i diversi rapporti anarmonici del gruppo costituito dai quattro elementi (sq_1, sq_2, sq_3, sq_4) o (SQ_1, SQ_2, SQ_3, SQ_4).

Un'altra interpretazione dell'annullarsi degl'invarianti *simultanei* Ψ e ψ del sistema di due quadriche si ottiene con le considerazioni seguenti.

Siano (U, u), (V, v) due coppie di quadriche congiunte, espresse in notazione ombrale da

$$U=(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)^2, \qquad u=(a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3)^2,$$
$$V=(B_1s_1+B_2s_2+B_3s_3)^2, \qquad v=(b_1S_1+b_2S_2+b_3S_3)^2,$$

e consideriamo gl'invarianti Ψ e ψ del sistema rispettivamente di 1° grado nei coefficienti di V e v; sarà

$$-\Psi=\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & B_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & B_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & B_3 \\ B_1, & B_2, & B_3, & 0 \end{vmatrix}, \qquad -\psi=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & b_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & b_3 \\ b_1, & b_2, & b_3, & 0 \end{vmatrix},$$

gli elementi delle ultime linee orizzontali e verticali di questi determinanti essendo le *ombre* delle quantità B_{ij}, b_{ij}.

Se la quadrica V o v si riduce ad una coppia di elementi (S_μ, S_ν) o (s_μ, s_ν), gli elementi dell'ultima linea orizzontale e dell'ultima linea verticale del determinante Ψ o ψ diverranno le coordinate di (S_μ, S_ν) o (s_μ, s_ν), e l'annullarsi di Ψ o ψ esprimerà la condizione affinchè la coppia (S_μ, S_ν) o (s_μ, s_ν) sia coniugata armonica rispetto alla quadrica u o U. Ciò posto, sia $(V_1, V_2 \ldots V_r)$ o $(v_1, v_2 \ldots v_r)$ un gruppo di quadriche rappresentate da coppie di elementi (S_μ, S_ν) o (s_μ, s_ν) coniugate armoniche

rispetto ad u o U, e siano $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r)$, $(\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_r)$ coefficienti arbitrarii; ponendo

(11) $\quad V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \ldots + \lambda_r V_r, \quad$ o $\quad v = \Lambda_1 v_1 + \Lambda_2 v_2 \ldots + \Lambda_r v_r,$

sarà evidentemente (U, V) o (u, v) un sistema di quadriche pel quale $\Psi = 0$, o $\psi = 0$.

Variando i coefficienti λ o Λ le quadriche V o v costituiranno una *serie* $(r-1)^{pla}$ *di primo grado;* ogni quadrica V o v della serie si dirà *armonica* rispetto ad u o U. Più generalmente se $(V_1, V_2 \ldots V_r)$ o $(v_1, v_2 \ldots v_r)$ è un gruppo di quadriche armoniche rispetto ad u o U, ogni quadrica V o v della serie (11), così generalizzata, sarà anche armonica rispetto ad u o U. Conoscendo una quadrica V o v armonica rispetto ad u o U, ed appartenente alla serie $(r-2)^{pla}$ definita dal gruppo $(V_1, V_2 \ldots V_{r-1})$ o $(v_1, v_2 \ldots v_{r-1})$, ogni quadrica V o v appartenente alla serie semplice definita dalla quadrica proposta unita a V_r o v_r sarà una quadrica armonica rispetto ad u o U, appartenente alla serie $(r-1)^{pla}$ definita dal gruppo $(V_1, V_2 \ldots V_r)$ o $(v_1, v_2 \ldots v_r)$; partendo dalla serie semplice delle quadriche armoniche rispetto ad u o U, si determinerà quindi facilmente una quadrica armonica rispetto ad u o U, appartenente ad una serie multipla qualunque.

Ritornando ora al sistema delle quadriche congiunte (U', u'), (U'', u''), si vedrà per le cose dette che se $\Psi'' = 0$, o $\Psi' = 0$, e per conseguenza anche $\psi' = 0$, o $\psi'' = 0$; 1°, potranno appartenere ad U'' o U' quaterne di elementi (q_1, q_2, q_3, q_4) tali che le coppie degli elementi $(q_1 q_2, q_3 q_4)$, $(q_1 q_3, q_2 q_4)$, $(q_1 q_4, q_2 q_3)$ siano coniugate armoniche rispetto ad u' o u'', e per conseguenza potranno appartenere ad u' o u'' quaterne di elementi (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) tali che le coppie degli elementi $(Q_1 Q_2, Q_3 Q_4)$, $(Q_1 Q_3, Q_2 Q_4)$, $(Q_1 Q_4, Q_2 Q_3)$ siano coniugate armoniche rispetto ad U'' o U'; 2°, potranno appartenere ad U'' o U' terne di elementi (x, y, z) coniugate rispetto ad u' o u'', e per conseguenza potranno appartenere ad u' o u'' terne di elementi (X, Y, Z) coniugate rispetto ad U'' o U'.

Per rendere più agevole l'interpretazione degl'invarianti, e la ricerca delle condizioni invariantive, si può disporre arbitrariamente della terna fondamentale alla quale si riferisce il sistema. Per darne qualche esempio, considerando primieramente il sistema delle due quadriche (U', U''), sia (x', y', z') o (x'', y'', z'') una terna qualunque appartenente ad U' o U'', e sia (X', Y', Z') o (X'', Y'', Z'') la sua terna coniugata armonica rispetto

ad U'' o U'; è noto che i tre elementi S determinati dalle coppie $(x', Y'Z')$, $(y', Z'X')$, $(z', X'Y')$, o $(x'', Y''Z'')$, $(y'', Z''X'')$, $(z'', X''Y'')$ hanno uno stesso elemento s' o s'' di comune; ora prendendo (x', y', z') o (x'', y'', z'') per terna fondamentale si vedrà che l'annullarsi dell'invariante Ψ' o Ψ'' del sistema delle due quadriche (U', U'') esprime la condizione affinchè l'elemento s' o s'' appartenga alla quadrica U' o U''. Similmente, considerando il sistema delle due quadriche (u', u''), sia (X', Y', Z') o (X'', Y'', Z'') una terna qualunque appartenente ad u' o u'', e sia (x', y', z') o (x'', y'', z'') la sua terna coniugata armonica rispetto ad u'' o u'; è noto che i tre elementi s determinati dalle coppie $(X', y'z')$, $(Y', z'x')$, $(Z', x'y')$, o $(X'', y''z'')$, $(Y'', z''x'')$, $(Z'', x''y'')$ hanno uno stesso elemento S' o S'' di comune; ora prendendo (X', Y', Z') o (X'', Y'', Z'') per terna fondamentale si vedrà che l'annullarsi dell'invariante ψ' o ψ'' del sistema delle due quadriche (u', u'') esprime la condizione affinchè l'elemento S' o S'' appartenga alla quadrica u' o u''. Si ottiene in tal modo un altro significato dell'annullarsi simultaneo degl'invarianti (Ψ', ψ'') o (Ψ'', ψ') del sistema delle quadriche congiunte (U', u'), (U'', u''); in particolare si possono prendere per le terne appartenenti alle quadriche proposte quelle formate con tre qualunque dei quattro elementi q o Q comuni ad (U', U'') o (u', u'').

Consideriamo in secondo luogo tre quadriche U o u della serie definita da (U', U'') o (u', u''), ed i valori del rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ che le determinano siano le radici dell'equazione

$$D'\sigma'^3 + F''\sigma'^2\sigma'' + F'\sigma'\sigma''^2 + D''\sigma''^3 = 0 ,$$

o

$$d'\Sigma'^3 + f''\Sigma'^2\Sigma'' + f'\Sigma'\Sigma''^2 + d''\Sigma''^3 = 0 .$$

Sia (x, y, z) o pure (X, Y, Z) una terna appartenente ad U', o U'', o pure u' o u'', e tale che gli elementi (yz, zx, xy) o pure (YZ, ZX, XY) appartengano rispettivamente alle diverse quadriche congiunte delle tre quadriche U o u della serie; prendendo (x, y, z) o (X, Y, Z) per terna fondamentale, e formando gl'invarianti del sistema (U', U'') o (u', u'') si troverà facilmente tra essi l'una o l'altra delle relazioni

(12)

$$(\Psi'D' - F'\Delta')^2 - 4(\Delta''D' - D''\Delta')(\Psi''D' - F''\Delta') = 0 ,$$

$$(\Psi''D'' - F''\Delta'')^2 - 4(\Delta'D'' - D'\Delta'')(\Psi'D'' - F'\Delta'') = 0 ,$$

o pure

(12)

$$(\psi'd' - f'\delta')^2 - 4(\delta''d' - d''\delta')(\psi''d' - f''\delta') = 0 ,$$

$$(\psi''d'' - f''\delta'')^2 - 4(\delta'd'' - d'\delta'')(\psi'd'' - f'\delta'') = 0 .$$

Se le tre quadriche U o u della serie coincidono con U' o U'', o puro u'' o u', si avrà

$$\Psi'^2-4\Delta''\Psi''=0\,,\qquad \text{o}\qquad \Psi''^2-4\Delta'\Psi'=0\,,$$

(13) o puro

$$\psi'^2-4\delta''\psi''=0\,,\qquad \text{o}\qquad \psi''^2-4\delta'\psi'=0\,.$$

In questi due sistemi di relazioni (13), la 1ª o la 2ª relazione di un sistema ha per conseguenza la 2ª o la 1ª relazione doll'altro sistema.

Se la terna (x, y, z) o (X, Y, Z) in vece di appartenere ad U' o U'', o pure u' o u'', appartenesse ad una quadrica qualunque $\sigma'U'+\sigma''U''$, o $\Sigma'u'+\Sigma''u''$ della serie definita da (U', U'') o (u', u''), si avrebbero in luogo delle relazioni (12) le altre

$$\begin{gathered}\left\{(\Delta'F'-D'\Psi')\sigma'^2+(\Delta'D''-D'\Delta''+\Psi''F'-F''\Psi')\sigma'\sigma''+(\Psi''D''-F''\Delta'')\sigma''^2\right\}^2\\ -4\left\{(\Delta'D''-D'\Delta'')\sigma'^2+(\Psi''D''-F''\Delta'')\sigma'\sigma''+(\Psi'D''-F'\Delta'')\sigma''^2\right\}\\ \left\{(\Delta'F''-D'\Psi'')\sigma'^2+(\Delta'F'-D'\Psi')\sigma'\sigma''+(\Delta'D''-D'\Delta'')\sigma''^2\right\}=0\,,\end{gathered}$$

(14)

$$\begin{gathered}\left\{(\delta'f'-d'\psi')\Sigma'^2+(\delta'd''-d'\delta''+\psi''f'-f''\psi')\Sigma'\Sigma''+(\psi''d''-f''\delta'')\Sigma''^2\right\}^2\\ -4\left\{(\delta'd''-d'\delta'')\Sigma'^2+(\psi''d''-f''\delta'')\Sigma'\Sigma''+(\psi'd''-f'\delta'')\Sigma''^2\right\}\\ \left\{(\delta'f''-d'\psi'')\Sigma'^2+(\delta'f'-d'\psi')\Sigma'\Sigma''+(\delta'd''-d'\delta'')\Sigma''^2\right\}=0\,.\end{gathered}$$

Per mezzo delle equazioni (12) si potrebbero di mano in mano trovare le condizioni affinchè essendo dato un numero qualunque $(3, 4\ldots r)$ di quadriche U o u della serie definita da (U', U''), o (u', u''), possa appartenere ad U' o U'', o puro u' o u'', un gruppo di elementi $(s_1, s_2\ldots s_r)$, o pure $(S_1, S_2\ldots S_r)$, tale che gli elementi $(s_1s_2, s_2s_3, \ldots s_{r-1}s_r, s_rs_1)$, o pure $(S_1S_2, S_2S_3, \ldots S_{r-1}S_r, S_rS_1)$ appartengano rispettivamente alle diverse quadriche congiunte delle r quadriche U o u della serie.

3. *Covarianti e contravarianti di 2° grado del sistema di due quadriche.* Essendo

$$U=\sigma'U'+\sigma''U''\,,\qquad \text{o}\qquad u=\Sigma'u'+\Sigma''u''\,,$$

una quadrica qualunque della serie definita da (U', U'') o (u', u''), indichiamo con (u) o (U) la forma congiunta di U o u. Riguardando (u', u'') come le forme congiunte di (U', U''), o (U', U'') come le forme congiunte di (u', u''), e ponendo

$$w=(A'_{22}A''_{33}+A'_{33}A''_{22}-2A'_{23}A''_{23})S_1^2+\ldots+2(A'_{31}A''_{12}+A'_{12}A''_{31}-A'_{11}A''_{23}-A'_{23}A''_{11})S_2S_3+\ldots$$

(1)

$$W=(a'_{22}a''_{33}+a'_{33}a''_{22}-2a'_{23}a''_{23})s_1^2+\ldots+2(a'_{31}a''_{12}+a'_{12}a''_{31}-a'_{11}a''_{23}-a'_{23}a''_{11})s_2s_3+\ldots$$

verrà

$$(u)=u'\sigma'^2+w\sigma'\sigma''+u''\sigma''^2\,,\qquad \text{o}\qquad (U)=U'\Sigma'^2+W\Sigma'\Sigma''+U''\Sigma''^2\,.$$

Variando $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ le quadriche (u) o (U) costituiscono una *serie semplice di 2° grado*, definita da (u', w, u'') o (U', W, U''); ogni quadrica (u) o (U) dolla serie è determinata dal valore del rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$. Questo rapporto ha due valori, determinati dall'equazione $(u)=0$, o $(U)=0$, allorchè si assegna un elemento S o s che debba appartenere ad (u) o (U); vi sono adunque due quadriche (u) o (U) della serie che verificano la data condizione; se a queste due quadriche l'elemento S o s è congiunto in (s_μ, s_ν) o (S_μ, S_ν), queste coppie di elementi saranno coniugate armoniche rispetto alla serie delle quadriche U o u.

Se l'una o l'altra delle equazioni $(u)=0$, $(U)=0$ ha le radici eguali, onde la condizione

$$(2) \qquad w^2-4u'u''=0\,, \qquad \text{o} \qquad W^2-4U'U''=0\,,$$

l'elemento S o s apparterrà ad uno dei quattro elementi q o Q comuni ad (U', U'') o (u', u''), sicchè l'equazioni (2) dinotano rispettivamente quelle quaterne di elementi.

Risulta dalla forma delle equazioni (2) che le due quaterne di elementi S o s, congiunti rispettivamente ad U'' ed U', o u' ed u'', nei loro quattro elementi comuni q o Q, appartengono alla quadrica w o W; questa quadrica w o W è il *contravariante* fondamentale del sistema (U', U'') o (u', u''), e ciò che vale lo stesso è il *covariante* fondamentale del sistema (u', u'') o (U', U''). Tutte le quadriche che hanno con quelle del sistema una relazione indipendente dalla terna fondamentale, vale a dire tutti i covarianti o contravarianti del sistema, potranno esprimersi con (U', U'', W) o (u', u'', w) e con gl'invarianti $(\Delta', \Delta'', \Psi', \Psi'')$ o $(\delta', \delta'', \psi', \psi'')$.

Nella ricerca dei covarianti o contravarianti del sistema si disporrà convenientemente della terna fondamentale, in modo da rendere il calcolo più semplice, essendo poi agevole passare dalle formole ottenute (per il loro carattere invariantivo) alle formole generali corrispondenti ad una terna fondamentale qualunque. In tal modo si rende anche più facile l'interpretazione dei covarianti o contravarianti; così p. e. relativamente a w o W, se si prende un elemento S o s appartenente a w o W per uno degli elementi della terna fondamentale, ponendo $S_2=S_3=0$, o $s_2=s_3=0$, si avrà la condizione

$$A'_{22}A''_{33}+A'_{33}A''_{22}-2A'_{23}A''_{23}=0\,, \qquad \text{o} \qquad a'_{22}a''_{33}+a'_{33}a''_{22}-2a'_{23}a''_{23}=0\,,$$

la quale esprime che le coppie degli elementi che S o s ha di comune

con (U', U'') o (u', u'') sono coniugate armoniche tra loro; questa proprietà *invariantiva* è adunque quella che caratterizza gli elementi appartenenti a w o W.

Riferiamo le due quadriche congiunte (U', u'), (U'', u'') alla loro terna coniugata comune, costituita dagli elementi doppii (xyz, XYZ) della serie definita da (U', U'') o (u', u''). Si otterranno facilmente per questa terna fondamentale, e quindi per una terna fondamentale qualunque, le espressioni dei seguenti covarianti o contravarianti del sistema.

Gli elementi (s, S) armonici dei diversi elementi (S, s) di (u', U') rispetto ad (u'', U''), o di (u'', U'') rispetto ad (u', U') apparterranno alle quadriche congiunte (V', v') o (V'', v'') espresse da

$$(3)\qquad V' = \Psi'' U'' - W\,,\quad v' = \psi'' u'' - w\,;\quad \text{o}\quad V'' = \Psi' U' - W\,,\quad v'' = \psi' u' - w\,;$$

queste si diranno le quadriche *armoniche congiunte* di (u', U'), o (u'', U''), rispetto ad (u'', U''), o (u', U').

In forma di determinanti sarà ancora

$$V' = \begin{vmatrix} A'_{11}, & A'_{12}, & A'_{13}, & U''_1 \\ A'_{21}, & A'_{22}, & A'_{23}, & U''_2 \\ A'_{31}, & A'_{32}, & A'_{33}, & U''_3 \\ U''_1, & U''_2, & U''_3, & 0 \end{vmatrix}, \qquad v' = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13}, & u''_1 \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23}, & u''_2 \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33}, & u''_3 \\ u''_1, & u''_2, & u''_3, & 0 \end{vmatrix},$$

$$V'' = \begin{vmatrix} A''_{11}, & A''_{12}, & A''_{13}, & U'_1 \\ A''_{21}, & A''_{22}, & A''_{23}, & U'_2 \\ A''_{31}, & A''_{32}, & A''_{33}, & U'_3 \\ U'_1, & U'_2, & U'_3, & 0 \end{vmatrix}, \qquad v'' = \begin{vmatrix} a''_{11}, & a''_{12}, & a''_{13}, & u'_1 \\ a''_{21}, & a''_{22}, & a''_{23}, & u'_2 \\ a''_{31}, & a''_{32}, & a''_{33}, & u'_3 \\ u'_1, & u'_2, & u'_3, & 0 \end{vmatrix},$$

Indicando con (W) o (w) la quadrica congiunta di w o W, si avrà

$$(4)\qquad \begin{aligned} (W) &= \Psi' U' - W + \Psi'' U'' = \Psi' U' + V' = \Psi'' U'' + V''\,, \\ (w) &= \psi' u' - w + \psi'' u'' = \psi' u' + v' = \psi'' u'' + v''\,. \end{aligned}$$

I gruppi di tre quadriche

$$\{U'', V', W\}\,,\ \{U', V'', W\}\,,\ \{U', V', (W)\}\,,\ \{U'', V'', (W)\}\,,$$

o

$$\{u'', v', w\}\,,\ \{u', v'', w\}\,,\ \{u', v', (w)\}\,,\ \{u'', v'', (w)\}\,.$$

sono tali che in ciascuno di essi le tre quadriche hanno una stessa quaterna di elementi s o S comuni; alle quadriche poi

$$\Psi' U' - \Psi'' U'' , \; \Psi' U' + \Psi'' U'' , \quad \text{o} \quad \psi' u' - \psi'' u'' , \; \psi' u' + \psi'' u'' ,$$

appartengono rispettivamente le due quaterne di elementi comuni ad (U', U'') e (V', V''), (U', U'') e $\{W, (W)\}$, o (u', u'') e (v', v''), (u', u'') e $\{w, (w)\}$.

Esprimendo che le forme (3) sono congiunte tra loro, se s'indicano con (w', w'') o (W', W'') i contravarianti fondamentali dei sistemi (U', W) (U'', W) o (u', w), (u'', w), si troverà, per l'equazioni (4),

$$(5) \quad w' = \Psi' u' + \Delta' u'' , \; w'' = \Psi'' u'' + \Delta'' u' ; \; \text{o} \; W' = \psi' U' + \delta' U'' , \; W'' = \psi'' U'' + \delta'' U' .$$

Sia ora la quadrica

$$\Gamma = \sigma' U' + \sigma W + \sigma'' U'' , \quad \text{o} \quad \gamma = \Sigma' u' + \Sigma w + \Sigma'' u'' ,$$

un covariante quadratico qualunque del sistema (U', U'') o (u', u''); indicando con (γ) o (Γ) la quadrica congiunta di Γ o γ, si troverà

$$\begin{aligned} (\gamma) = & (\sigma'^2 + \sigma'\sigma\Psi' + \sigma''\sigma\Delta'' + \sigma^2\Delta''\Psi'') u' \\ & + (\sigma'\sigma'' - \sigma^2\Delta'\Delta'') w \\ & + (\sigma''^2 + \sigma''\sigma\Psi'' + \sigma'\sigma\Delta' + \sigma^2\Delta'\Psi') u'' , \end{aligned}$$

(6) o

$$\begin{aligned} (\Gamma) = & (\Sigma'^2 + \Sigma'\Sigma\psi' + \Sigma''\Sigma\delta'' + \Sigma^2\delta''\psi'') U' \\ & + (\Sigma'\Sigma'' - \Sigma^2\delta'\delta'') W \\ & + (\Sigma''^2 + \Sigma''\Sigma\psi'' + \Sigma'\Sigma\delta' + \Sigma^2\delta'\psi') U'' . \end{aligned}$$

Ponendo

$$\Sigma' = \sigma'^2 + \sigma'\sigma\Psi' + \sigma''\sigma\Delta'' + \sigma^2\Delta''\Psi'' ,$$

$$\Sigma = \sigma'\sigma'' - \sigma^2\Delta'\Delta'' ,$$

$$\Sigma'' = \sigma''^2 + \sigma''\sigma\Psi'' + \sigma'\sigma\Delta' + \sigma^2\Delta'\Psi' ,$$

$$\Omega = \sigma'^3\Delta' + \sigma'^2\sigma''\Psi'' + \sigma'\sigma''^2\Psi' + \sigma''^3\Delta''$$

$$(7) \quad + 2\sigma'^2\sigma\Delta'\Psi' + \sigma\sigma'\sigma''(\Psi'\Psi'' + 3\Delta'\Delta'') + 2\sigma''^2\sigma\Delta''\Psi''$$

$$+ \sigma'\sigma^2\Delta'(\Psi'^2 + \Delta''\Psi'') + \sigma^3\Delta'\Delta''(\Psi'\Psi'' - \Delta'\Delta'') + \sigma''\sigma^2\Delta''(\Psi''^2 + \Delta'\Psi')$$

o

$$\sigma'=\Sigma'^2+\Sigma'\Sigma\psi'+\Sigma''\Sigma\partial''+\Sigma^2\partial''\psi'',$$

$$\sigma=\Sigma'\Sigma''-\Sigma^2\partial'\partial'',$$

$$\sigma''=\Sigma''^2+\Sigma''\Sigma\psi''+\Sigma'\Sigma\partial'+\Sigma^2\partial'\psi',$$

$$\omega=\Sigma'^3\partial'+\Sigma'^2\Sigma''\psi''+\Sigma'\Sigma''^2\psi'+\Sigma''^3\partial''$$

$$(7)\qquad +2\Sigma'^2\Sigma\partial'\psi'+\Sigma\Sigma'\Sigma''(\psi'\psi''+3\partial'\partial'')+2\Sigma''^2\Sigma\partial''\psi''$$

$$+\Sigma'\Sigma^2\partial'(\psi'^2+\partial''\psi'')+\Sigma^3\partial'\partial''(\psi'\psi''-\partial'\partial'')+\Sigma''\Sigma^2\partial''(\psi''^2+\partial'\psi'),$$

sarà

$$\Sigma'^2\Delta'+\Sigma'\Sigma\Psi''+\Sigma''\Sigma\Delta''+\Sigma^2\Psi'=\Omega\sigma',$$

$$\Sigma'\Sigma''-\Sigma^2=\Omega\sigma,$$

$$\Sigma''^2\Delta''+\Sigma''\Sigma\Psi'+\Sigma'\Sigma\Delta'+\Sigma^2\Psi''=\Omega\sigma'',$$

o

$$\sigma'^2\partial'+\sigma'\sigma\psi''+\sigma''\sigma\partial''+\sigma^2\psi'=\omega\Sigma',$$

$$\sigma'\sigma''-\sigma^2=\Omega\Sigma,$$

$$\sigma''^2\partial''+\sigma''\sigma\psi'+\sigma'\sigma\partial'+\sigma^2\psi''=\omega\Sigma''.$$

L'espressione Ω o ϖ è il discriminante di Γ o γ, sicchè gl'invarianti simultanei dei sistemi (U', W), (U'', W), o (u', w), (u'', w) saranno

$$2\Delta'\Psi',\ \Delta'(\Psi'^2+\Delta''\Psi'');\qquad 2\Delta''\Psi'',\ \Delta''(\Psi''^2+\Delta'\Psi'),$$

o

$$2\partial'\psi',\ \partial'(\psi'^2+\partial''\psi'');\qquad 2\partial''\psi'',\ \partial''(\psi''^2+\partial'\psi'),$$

ed il discriminante di W o w sarà

$$\Delta'\Delta''(\Psi'\Psi''-\Delta'\Delta'')\qquad o\qquad \partial'\partial''(\psi'\psi''-\partial'\partial'').$$

Ponendo le condizioni

$$\Psi'\Psi''-\Delta'\Delta''=0,\qquad e\qquad \psi'\psi''-\partial'\partial''=0,$$

l'una delle quali è conseguenza dell'altra, le quadriche W e w si ridurranno rispettivamente a coppie di elementi S ed s.

Per le formole (12) del numero precedente si vedrà che supponendo la terna (x, y, z) o (X, Y, Z) appartenente ad U' o U'', o pure u' o u'', e tale che gli elementi (xz, yz) o (XZ, YZ) appartengano alla quadrica congiunta u'' o u' di U'' o U', o pure alla quadrica congiunta U'' o U' di u''

o u', l'elemento xy o XY apparterrà alla quadrica congiunta di

$$(\Psi'^2 - 4\Delta''\Psi'')U' + 4\Delta'\Delta''U'', \quad \text{o} \quad (\Psi''^2 - 4\Delta'\Psi')U'' + 4\Delta''\Delta'U'$$

(8) o pure

$$(\psi'^2 - 4\delta''\psi'')u' + 4\delta'\delta''u'', \quad \text{o} \quad (\psi''^2 - 4\delta'\psi')u'' + 4\delta''\delta'u',$$

vale a dire, per le formole (6), alla quadrica

$$(9) \quad \text{o} \quad \begin{cases} (\Psi'^2 - 4\Delta''\Psi'')^2 u' + 4\Delta'\Delta''(\Psi'^2 - 4\Delta''\Psi'')w + 16\Delta'^2\Delta''^2 u'', \\ (\Psi''^2 - 4\Delta'\Psi')^2 u'' + 4\Delta''\Delta'(\Psi''^2 - 4\Delta'\Psi')w + 16\Delta''^2\Delta'^2 u', \end{cases}$$

o pure

$$(9) \quad \text{o} \quad \begin{cases} (\psi'^2 - 4\delta''\psi'')^2 U' + 4\delta'\delta''(\psi'^2 - 4\delta''\psi'')W + 16\delta'^2\delta''^2 U'', \\ (\psi''^2 - 4\delta'\psi')^2 U'' + 4\delta''\delta'(\psi''^2 - 4\delta'\psi')W + 16\delta''^2\delta'^2 U'. \end{cases}$$

Consideriamo il sistema delle due quadriche

$$m'U' + m''U'', \; n'U' + n''U'', \quad \text{o} \quad M'u' + M''u'', \; N'u' + N''u'';$$

gl'invarianti simultanei, ed il contravariante fondamentale del siste[ma]
saranno espressi rispettivamente da

$$(10) \quad \begin{cases} 3\Delta'm'^2n' + \Psi''m'(2n'm'' + m'n'') + \Psi'm''(2m'n'' + n'm'') + 3\Delta''m''^2n'', \\ 3\Delta'n'^2m' + \Psi''n'(2m'n'' + n'm'') + \Psi'n''(2n'm'' + m'n'') + 3\Delta''n''^2m'', \end{cases}$$

$$(11) \qquad 2m'n'u' + (m'n'' + n'm'')w + 2m''n''u'',$$

o

$$(10) \quad \begin{cases} 3\delta'M'^2N' + \psi''M'(2N'M'' + M'N'') + \psi'M''(2M'N'' + N'M'') + 3\delta''M''^2N'', \\ 3\delta'N'^2M' + \psi''N'(2M'N'' + N'M'') + \psi'N''(2N'M'' + M'N'') + 3\delta''N''^2M'', \end{cases}$$

$$(11) \qquad 2M'N'U' + (M'N'' + N'M'')W + 2M''N''U'',$$

quindi, per le formole (4) e (6), il covariante fondamentale del sistema si troverà espresso da

$$(12) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \{2m'n'(m''n''\Psi' + m'n'\Delta') + (m'n'' + n'm'')(m'n'\Psi'' + m''n''\Delta'')\}U' \\ \qquad + (m'n'' - n'm'')^2 W \\ + \{2m''n''(m'n'\Psi'' + m''n''\Delta'') + (m'n'' + n'm'')(m''n''\Psi' + m'n'\Delta')\}U'', \\ \{2M'N'(M''N''\psi' + M'N'\delta') + (M'N'' + N'M'')(M'N'\psi'' + M''N''\delta'')\}u' \\ \qquad + (M'N'' - N'M'')^2 w \\ \{2M''N''(M'N'\psi'' + M''N''\delta'') + (M'N'' + N'M'')(M''N''\psi' + M'N'\delta')\}u''. \end{cases}$$

Se $m':m''$ ed $n':n''$, o $M':M''$ ed $N':N''$, sono i due valori di $\sigma':\sigma''$ o $\Sigma':\Sigma''$ tratti dall'equazione (8) del numero precedente, si potrà supporre

$$m'n' = \Psi'^2 - 3\Delta''\Psi'' , \quad m'n'' + n'm'' = 9\Delta'\Delta'' - \Psi'\Psi'' , \quad m''n'' = \Psi''^2 - 3\Delta'\Psi' ,$$

$$M'N' = \psi'^2 - 3\delta''\psi'' , \quad M'N'' + N'M'' = 9\delta'\delta'' - \psi'\psi'' , \quad M''N'' = \psi''^2 - 3\delta'\psi' ;$$

con ciò le formole (10) si annulleranno identicamente, e le quadriche (11) o (12) diverranno

$$(13) \quad \begin{aligned} & 2(\Psi'^2 - 3\Delta''\Psi'')u' + (9\Delta'\Delta'' - \Psi'\Psi'')w + 2(\Psi''^2 - 3\Delta'\Psi')u'' , \\ & 2(\psi'^2 - 3\delta''\psi'')U' + (9\delta'\delta'' - \psi'\psi'')W + 2(\psi''^2 - 3\delta'\psi')U'' , \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} & (\Psi'^2\Psi''^2 - 4\Delta'\Psi'^3 - 4\Delta''\Psi''^3 + 18\Delta'\Delta''\Psi'\Psi'' - 27\Delta'^2\Delta''^2)(\Psi'U' - 3W + \Psi''U'') , \\ & (\psi'^2\psi''^2 - 4\delta'\psi'^3 - 4\delta''\psi''^3 + 18\delta'\delta''\psi'\psi'' - 27\delta'^2\delta''^2)(\psi'u' - 3w + \psi''u'') . \end{aligned}$$

La 1ª o la 2ª delle quadriche (13) ha per quadrica congiunta la 1ª o la 2ª delle quadriche (14), come è facile vedere per le formole (6); a questa quadrica appartengono evidentemente le due quaterne di elementi S o s congiunti alle due quadriche equianarmoniche della serie definita da (U', U'') o (u', u'') nei loro quattro elementi comuni q o Q; riferendo la detta quadrica alla terna (xyz, XYZ) degli elementi doppii della serie, si vedrà che ad essa appartengono ancora le tre coppie di elementi S o s coniugate armoniche rispettivamente rispetto alle coppie

$$(q_2q_3 , q_1q_4) , (Y, Z) ; \; (q_3q_1 , q_2q_4) , (Z, X) ; \; (q_1q_2 , q_3q_4) , (X, Y) ,$$

o

$$(Q_2Q_3 , Q_1Q_4) , (y, z) ; \; (Q_3Q_1 , Q_2Q_4) , (z, x) ; \; (Q_1Q_2 , Q_3Q_4) , (x, y) ;$$

tale quadrica si dice perciò la quadrica dei *quattordici elementi* S o s rispetto alla quaterna degli elementi q o Q.

Se (U', U'') sono le due quadriche equianarmoniche della serie da esse definita, le loro quadriche congiunte (u', u'') saranno anche le due quadriche equianarmoniche della serie da esse definita, e viceversa: per questo sistema di quadriche congiunte (U', u') (U'', u'') si hanno le notevoli proprietà; 1° si annullano insieme gl'invarianti simultanei Ψ', Ψ'' ψ', ψ'' del sistema, e quindi si verificano insieme le proprietà corrispondenti a queste condizioni, e precedentemente stabilite; 2° il covariante fondamentale ed il contravariante fondamentale del sistema sono due quadriche congiunte (W, w); 3° le quadriche armoniche congiunte (V', v') o (V'', v'') di (u', U') rispetto ad (u'', U'') o di (u'', U'') rispetto ad (u', U'), e le quadriche dei quattordici elementi S o s rispetto alla quaterna degli elementi q o Q comuni ad (U', U'') o (u', u'') coincidono tutte con le qua-

driche congiunto (W, w); 4° a ciascuno dei duo sistemi di quadriche (U'', u'') ed (U', u') può appartenere una stessa terna di elementi (xyz, XYZ); 5° i tre sistemi di quadriche congiunte

$$\{(U', u'), (U'', u''); (W, w)\}, \ \{(U', u'), (W, w); (U'', u'')\}, \ \{(U'', u''), (W, w); (U', u')\},$$

sono tali che in ciascuno di essi le tre coppie di quadriche congiunte sono tra loro nella medesima relazione.

4. *Covarianti e contravarianti di grado superiore del sistema di due quadriche.* Consideriamo i tre sistemi di equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta'\sigma'^3 + \Psi''\sigma'^2\sigma'' + \Psi'\sigma'\sigma''^2 + \Delta''\sigma''^3 = 0 , \\ \delta'\Sigma'^3 + \psi''\Sigma'^2\Sigma'' + \psi'\Sigma'\Sigma''^2 + \delta''\Sigma''^3 = 0 , \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} H'\sigma'^2 + H\sigma'\sigma'' + H''\sigma''^2 = 0 , \\ h'\Sigma'^2 + h\Sigma'\Sigma'' + h''\Sigma''^2 = 0 , \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} D'\sigma'^3 + F''\sigma'^2\sigma'' + F'\sigma'\sigma''^2 + D''\sigma''^3 = 0 , \\ d'\Sigma'^3 + f''\Sigma'^2\Sigma'' + f'\Sigma'\Sigma''^2 + d''\Sigma''^3 = 0 , \end{cases}$$

nelle quali si è messo per brevità

$$H' = \Psi''^2 - 3\Delta'\Psi' , \quad H = \Psi'\Psi'' - 9\Delta'\Delta'' , \quad H'' = \Psi'^2 - 3\Delta''\Psi'' ,$$

$$h' = \psi''^2 - 3\delta'\psi' , \quad h = \psi'\psi'' - 9\delta'\delta'' , \quad h'' = \psi'^2 - 3\delta''\psi'' ,$$

$$D' = (2\Psi''^3 - 9\Delta'\Psi'\Psi'' + 27\Delta'^2\Delta'') , \quad F'' = 3(\Psi''^2\Psi' - 6\Delta'\Psi'^2 + 9\Delta'\Delta''\Psi'') ,$$

$$D'' = -(2\Psi'^3 - 9\Delta''\Psi''\Psi' + 27\Delta''^2\Delta') , \quad F' = -3(\Psi'^2\Psi'' - 6\Delta''\Psi''^2 + 9\Delta''\Delta'\Psi') ,$$

$$d' = (2\psi''^3 - 9\delta'\psi'\psi'' + 27\delta'^2\delta'') , \quad f'' = 3(\psi''^2\psi' - 6\delta'\psi'^2 + 9\delta'\delta''\psi'') ,$$

$$d'' = -(2\psi'^3 - 9\delta''\psi''\psi' + 27\delta''^2\delta') , \quad f' = -3(\psi'^2\psi'' - 6\delta''\psi''^2 + 9\delta''\delta'\psi') .$$

Eliminando il rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ tra l'equazione

$$\sigma'U' + \sigma''U'' = 0 , \qquad \text{o} \qquad \Sigma'u' + \Sigma''u'' = 0 ,$$

e la 1ª o la 2ª equazione del sistema (1), (2), (3), si avranno i covarianti di (U', U'') o (u', u'')

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta'U''^3 - \Psi''U''^2U' + \Psi'U''U'^2 - \Delta''U'^3 , \\ \delta'u''^3 - \psi''u''^2u' + \psi'u''u'^2 - \delta''u'^3 , \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} H'U''^2 - HU''U' + H''U'^2 , \\ h'u''^2 - hu''u' + h''u'^2 , \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} D'U''^3 - F''U''^2U' + F'U''U'^2 - D''U'^3 , \\ d'u''^3 - f''u''^2u' + f'u''u'^2 - d''u'^3 , \end{cases}$$

rispettivamente di 6°, di 4° e di 6° grado fra le variabili, e di 6°, di 8° e di 12° grado nei coefficienti delle quadriche (U', U'') o (u', u''). Le forme (4), (5), (6) rappresentano rispettivamente, nella serie delle quadriche definita da (U', U'') o (u', u''), il gruppo delle tre quadriche della serie ad elemento doppio s o S, delle due quadriche equianarmoniche, delle tre quadriche armoniche della stessa serie.

Se poi si elimina il rapporto $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ tra l'equazione

$$\sigma''^2 u' + \sigma'\sigma'' w + \sigma'^2 u'' = 0\,, \quad \text{o} \quad \Sigma''^2 U' + \Sigma'\Sigma'' W + \Sigma'^2 U'' = 0$$

e le stesse equazioni (1), (2), (3) rispettivamente, si avranno le forme *congiunte* delle forme (4), (5), (6) espresse da

$$(7)\quad \begin{gathered} \Delta''^2 u'^3 + (\Psi'^2 - 2\Delta''\Psi'')u'^2 u'' + (\Psi''^2 - 2\Delta'\Psi')u'u''^2 + \Delta'^2 u''^3 \\ - \left\{ \Delta''\Psi' u'^2 + (\Psi'\Psi'' - 3\Delta'\Delta'')u'u'' + \Delta'\Psi'' u''^2 \right\} w \\ + (\Delta''\Psi'' u' - \Delta'\Delta'' w + \Delta'\Psi' u'')w^2\,, \\ \partial''^2 U'^3 + (\psi'^2 - 2\partial''\psi'')U'^2 U'' + (\psi''^2 - 2\partial'\psi')U'U''^2 + \partial'^2 U''^3 \\ - \left\{ \partial''\psi' U'^2 + (\psi'\psi'' - 3\partial'\partial'')U'U'' + \partial'\psi'' U''^2 \right\} W \\ + (\partial''\psi'' U' - \partial'\partial'' W + \partial'\psi' U'')W^2\,, \end{gathered}$$

$$(8)\quad \begin{gathered} H''^2 u'^2 + (H^2 - 2H'H'')u'u'' + H'^2 u''^2 \\ - (H''Hu' - H'H''w + H'Hu'')w\,, \\ h''^2 U'^2 + (h^2 - 2h'h'')U'U'' + h'^2 U''^2 \\ - (h''hU' - h'h''W + h'hU'')W\,, \end{gathered}$$

$$(9)\quad \begin{gathered} D''^2 u'^3 + (F'^2 - 2D''F'')u'^2 u'' + (F''^2 - 2D'F')u'u''^2 + D'^2 u''^3 \\ - \left\{ D''F' u'^2 + (F'F'' - 3D'D'')u'u'' + D'F'' u''^2 \right\} w \\ + (D''F'' u' - D'D'' w + D'F' u'')w^2\,, \\ d''^2 U'^3 + (f'^2 - 2d''f'')U'^2 U'' + (f''^2 - 2d'f')U'U''^2 + d'^2 U''^3 \\ - \left\{ d''f' U'^2 + (f'f'' - 3d'd'')U'U'' + d'f'' U''^2 \right\} W \\ + (D''f'' U' - d'd'' W + d'f' U'')W^2\,, \end{gathered}$$

e di 12°, 16° e 24° grado nei coefficienti delle quadriche (U', U'') o (u', u'').

La forma (7) è il quadrato di quella che determina il gruppo dei tre elementi doppii (x, y, z) o (X, Y, Z) della serie definita da (U', U'') o (u', u''); questo gruppo di tre elementi, sotto altra forma, è determinato

dal *Jacobiano* del sistema (u', u'', w) o (U', U'', W) cioè dal determinante

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} u'_1\,, & u'_2\,, & u'_3 \\ u''_1\,, & u''_2\,, & u''_3 \\ w_1\,, & w_2\,, & w_3 \end{vmatrix}\,, \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} U'_1\,, & U'_2\,, & U'_3 \\ U''_1\,, & U''_2\,, & U''_3 \\ W_1\,, & W_2\,, & W_3 \end{vmatrix}$$

Eliminando $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ tra l'una o l'altra delle equazioni

$$2\sigma' u' + \sigma'' w = 0 \qquad 2\sigma'' u'' + \sigma' w = 0\,,$$

o

$$2\Sigma' U' + \Sigma'' W = 0 \qquad 2\Sigma'' U'' + \Sigma' W = 0\,,$$

e la 1ª o la 2ª delle equazioni (1), (2), (3) si avranno i contravarianti di (U', U'') o (u', u'')

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\Delta' w^3 - 2\Psi'' w^2 u' + 4\Psi' w u'^2 - 8\Delta'' u'^3\,,\\ &\Delta'' w^3 - 2\Psi' w^2 u'' + 4\Psi'' w u''^2 - 8\Delta' u''^3\,,\\ &\delta' W^3 - 2\psi'' W^2 U' + 4\psi' W U'^2 - 8\delta'' U'^3\,,\\ &\delta'' W^3 - 2\psi' W^2 U'' + 4\psi'' W U''^2 - 8\delta' U''^3\,, \end{aligned}$$

$$(12)\qquad \begin{aligned} &H' w^2 - 2Hwu' + 4H'' u'^2\,, \qquad H'' w^2 - 2Hwu'' + 4H' u''^2\,,\\ &h' W^2 - 2hWU' + 4h'' U'^2\,, \qquad h'' W^2 - 2hWU'' + 4h' U''^2\,, \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} &D' w^3 - 2F'' w^2 u' + 4F' w u'^2 - 8D'' u'^3\,,\\ &D'' w^3 - 2F' w^2 u'' + 4F'' w u''^2 - 8D' u''^3\,,\\ &d' W^3 - 2f'' W^2 U' + 4f' W U'^2 - 8d'' U'^3\,,\\ &d'' W^3 - 2f' W^2 U'' + 4f' W U''^2 - 8d' U''^3\,, \end{aligned}$$

rispettivamente di 6°, di 4° e di 6° grado fra le variabili, e di 9° di 10° e di 15° grado nei coefficienti delle quadriche (U', U'') o (u', u''). Le forme (11), (12), (13) rappresentano rispettivamente, nella serie delle quadriche definita da (U', U''), o (u', u''), il gruppo dei contravarianti fondamentali dei sistemi costituiti dalla quadrica U', o U'', o pure dalla quadrica u' o u'', combinata con ciascuna delle tre quadriche della serie dotate di elemento doppio S, s, con ciascuna delle due quadriche equianarmoniche, o con ciascuna delle tre quadriche armoniche della stessa serie.

Per avere le forme congiunte delle forme (11), (12), (13) si troveranno prima le forme congiunte di

$$2\sigma' u' + \sigma'' w\ , \qquad 2\sigma'' u'' + \sigma' w\ ,$$
$$2\Sigma' U' + \Sigma'' W\ , \qquad 2\Sigma'' U'' + \Sigma' W\ ,$$

che sono rispettivamente, per le formole (6) del numero precedente

$$\begin{array}{ll} & 4\sigma'^2\Delta'U' + 2\sigma'\sigma''(\Psi''U' + \Delta'U'') + \sigma''^2(\Psi'U'' - W + \Psi''U')\ , \\ & 4\sigma''^2\Delta''U'' + 2\sigma''\sigma'(\Psi'U'' + \Delta''U') + \sigma'^2(\Psi'U'' - W + \Psi'U')\ , \\ (14) & 4\Sigma'^2\delta'u' + 2\Sigma'\Sigma''(\psi''u' + \delta'u'') + \Sigma''^2(\psi'u' - w + \psi''u'')\ , \\ & 4\Sigma''^2\delta''u'' + 2\Sigma''\Sigma'(\psi'u'' + \delta''u') + \Sigma'^2(\psi''u'' - w + \psi'u')\ , \end{array}$$

indi eliminando da esse $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ per mezzo dello equazioni (1), (2), (3), si avranno per risultato le formole in cui si cambiano le (7), (8), (9) ponendo in esse rispettivamente in vece di (u', w, u'') o (U', W, U'') i moltiplicatori di $(\sigma'^2, \sigma'\sigma'', \sigma''^2)$ o $(\Sigma'^2, \Sigma'\Sigma'', \Sigma''^2)$ nell'equazioni (14).

Considerando le tre quadriche

$$l'U' + l''U''\ , \qquad m'U' + m''U''\ , \qquad n'U' + n''U''\ ,$$

combinandole a due a due, e formando il prodotto dei loro tre contravarianti fondamentali, si avrà, supponendo che $l' : l''$, $m' : m''$, $n' : n''$ siano i tre valori di $\sigma' : \sigma''$ tratti dalla 1ª dello equazioni (1) o (3),

$$\begin{array}{ll} & 8(\Delta'^2u'^3 + \Delta'\Psi'u'^2u'' + \Delta''\Psi''u'u''^2 + \Delta''^2u''^3) \\ & + 4\left\{2\Delta'\Psi''u'^2 + (\Psi'\Psi'' + 3\Delta'\Delta'')u'u'' + 2\Delta''\Psi'u''^2\right\}w \\ (15) & + \left\{2(\Psi'^2 + \Delta''\Psi'')u' + (\Psi'\Psi'' - \Delta'\Delta'')w + 2(\Psi''^2 + \Delta'\Psi')u''\right\}w^2\ , \\ & 8(D'^2u'^3 + D'F'u'^2u'' + D''F''u'u''^2 + D''^2u''^3) \\ & + 4\left\{2D'F''u'^2 + (F'F'' + 3D'D'')u'u'' + 2D''F'u''^2\right\}w \\ & + \left\{2(F'^2 + D''F'')u' + (F'F'' - D'D'')w + 2(F''^2 + D'F')u''\right\}w^2\ . \end{array}$$

Analoghe formole si otterranno cambiando le lettere minuscole in maiuscole, e viceversa; si hanno in tal modo due contravarianti del sistema (U', U''), o (u', u''), di 6° grado nelle variabili, e di 12° e 24° grado nei coefficienti delle due quadriche (U', U'') o (u', u'').

Finalmente, nella serie definita da (U', U''), o (u', u''), consideriamo due

quadriche U o u, che determinano con le due quadriche equianarmoniche della serie un gruppo armonico: il contravariante fondamentale del sistema delle due quadriche U o u sarà

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\sigma'^2(Hu'-H'w)+2\sigma'\sigma''(H''u'-H'u'')+\sigma''^2(H''w-Hu''),\\ &\Sigma'^2(hU'-h'W)+2\Sigma'\Sigma''(h''U'-h'U'')+\Sigma''^2(h'W-hU''); \end{aligned}$$

eliminando $\sigma':\sigma''$ o $\Sigma':\Sigma''$ da questo formole per mezzo delle equazioni (1), (3) rispettivamento, si avranno le formole in cui si cambiano le (7), (9) ponendo in esse rispettivamente in vece di (u', w, u'') o (U', W, U'') i moltiplicatori di $(\sigma'^2, \sigma'\sigma'', \sigma''^2)$, o $(\Sigma'^2, \Sigma'\Sigma'', \Sigma''^2)$ nell'equazioni (16). Rammentandosi la proprietà che gli elementi di una forma binaria cubica e quelli del suo covariante cubico si *corrispondono* in modo da formare tre coppie coniugate armoniche rispetto alla coppia degli elementi dell'Hessiano della stessa forma, si vedrà che i due risultati dell'eliminazione indicata di $\sigma':\sigma''$ o $\Sigma':\Sigma''$ dinoteranno lo stesso gruppo dei tre contravarianti fondamendali dei sistemi che si ottengono combinando ciascuna quadrica della serie definita da (U', U''), o (u', u''), dotata di elemento doppio s o S, con la *corrispondente* quadrica armonica della stessa serie.

Le ricerche precedenti si potrebbero intraprendere ancora considerando il covariante fondamentale del sistema di due quadriche in vece del loro contravariante fondamendale; si otterranno così altri covarianti o contravarianti del sistema. Di tutte le forme ottenute si troverebbero poi le forme congiunte, nel modo che si è precedentemente indicato.

5. *Elementi comuni a due quadriche.* Supponiamo due coppie di quadriche congiunte espresse, rispetto ad una terna fondamentale qualunque, da

$$U'=(A'_1 s_1+A'_2 s_2+A'_3 s_3)^2,\qquad u'=(a'_1 S_1+a'_2 S_2+a'_3 S_3)^2,$$
$$U''=(A''_1 s_1+A''_2 s_2+A''_3 s_3)^2,\qquad u''=(a''_1 S_1+a''_2 S_2+a''_3 S_3)^2,$$

e rispetto alla loro terna coniugata comune, presa per terna fondamentale, da

$$V'=B'_1 t_1^2+B'_2 t_2^2+B'_3 t_3^2,\qquad V''=B''_1 t_1^2+B''_2 t_2^2+B''_3 t_3^2,$$
$$v'=b'_1 T_1^2+b'_2 T_2^2+b'_3 T_3^2,\qquad v''=b''_1 T_1^2+b''_2 T_2^2+b''_3 T_3^2;$$

sia inoltro

$$U=\sigma' U'+\sigma'' U'',\quad V=\sigma' V'+\sigma'' V'',\quad u=\Sigma' u'+\Sigma'' u'',\quad v=\Sigma' v'+\Sigma'' v'',$$

Indicando con

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33} \end{vmatrix}, \qquad \lambda = \begin{vmatrix} \Lambda_{11}, & \Lambda_{12}, & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21}, & \Lambda_{22}, & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31}, & \Lambda_{32}, & \Lambda_{33} \end{vmatrix}$$

due determinanti ad elementi reciproci, si potrà supporre

$$(1) \qquad \begin{aligned} t_1 &= \lambda_{11} s_1 + \lambda_{12} s_2 + \lambda_{13} s_3 , & T_1 &= \Lambda_{11} S_1 + \Lambda_{12} S_2 + \Lambda_{13} S_3 , \\ t_2 &= \lambda_{21} s_1 + \lambda_{22} s_2 + \lambda_{23} s_3 , & T_2 &= \Lambda_{21} S_1 + \Lambda_{22} S_2 + \Lambda_{23} S_3 , \\ t_3 &= \lambda_{31} s_1 + \lambda_{32} s_2 + \lambda_{33} s_3 , & T_3 &= \Lambda_{31} S_1 + \Lambda_{32} S_2 + \Lambda_{33} S_3 . \end{aligned}$$

Essendo, per qualunque valore di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$, identicamente

$$\sigma' U' + \sigma'' U'' = \sigma' V' + \sigma'' V'' , \qquad \text{o} \qquad \Sigma' u' + \Sigma'' u'' = \Sigma' v' + \Sigma'' v'' ,$$

si avrà, formando il discriminante delle quadriche (U, V) o (u, v),

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{B'_1 B'_2 B'_3}{\Delta'} = \frac{B'_2 B'_3 B''_1 + B'_3 B'_1 B''_2 + B'_1 B'_2 B''_3}{\Psi''} \\ &= \frac{B''_2 B''_3 B'_1 + B''_3 B''_1 B'_2 + B''_1 B''_2 B'_3}{\Psi'} = \frac{B''_1 B''_2 B''_3}{\Delta''} = \frac{1}{\Lambda^2} , \\ &\frac{b'_1 b'_2 b'_3}{\delta'} = \frac{b'_2 b'_3 b''_1 + b'_3 b'_1 b''_2 + b'_1 b'_2 b''_3}{\psi''} \\ &= \frac{b''_2 b''_3 b'_1 + b''_3 b''_1 b'_2 + b''_1 b''_2 b'_3}{\psi'} = \frac{b''_1 b''_2 b''_3}{\delta''} = \frac{1}{\lambda^2} , \end{aligned}$$

adunque risolvendo l'una o l'altra delle equazioni

$$(3) \qquad \begin{aligned} \Delta' \sigma'^3 + \Psi'' \sigma'^2 \sigma'' + \Psi' \sigma' \sigma''^2 + \Delta'' \sigma''^3 &= 0 , \\ \delta' \Sigma'^3 + \psi'' \Sigma'^2 \Sigma'' + \psi' \Sigma' \Sigma''^2 + \delta'' \Sigma''^3 &= 0 , \end{aligned}$$

i tre valori di $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ che si ottengono dinoteranno i rapporti

$$-\frac{B''_1}{B'_1}, -\frac{B''_2}{B'_2}, -\frac{B''_3}{B'_3}, \qquad \text{o} \qquad -\frac{b''_1}{b'_1}, -\frac{b''_2}{b'_2}, -\frac{b''_3}{b'_3},$$

sicchè prendendo arbitrariamente i coefficienti B'_i o B''_i, o pure b'_i o b''_i, si avranno in tal modo i coefficienti B''_i o B'_i, o pure b''_i o b'_i.

Se poi si formano le quadriche congiunte delle quadriche (U, V) o (u, v), supponendo che $\sigma' : \sigma''$ o $\Sigma' : \Sigma''$ siano successivamente le diverse radici dell'una o l'altra delle equazioni (3), si avrà identicamente

$$
\begin{aligned}
&(B'_1 B''_2 - B'_2 B''_1)(B'_3 B''_1 - B'_1 B''_3)\, T_1^2 = B''^2_1 u' - B''_1 B'_1 w + B'^2_1 u'' = \Omega_1^2 ,\\
&(B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2)(B'_1 B''_2 - B'_2 B''_1)\, T_2^2 = B''^2_2 u' - B''_2 B'_2 w + B'^2_2 u'' = \Omega_2^2 ,\\
&(B'_3 B''_1 - B'_1 B''_3)(B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2)\, T_3^2 = B''^2_3 u' - B''_3 B'_3 w + B'^2_3 u'' = \Omega_3^2 ,
\end{aligned}
$$

(4) o pure

$$
\begin{aligned}
&(b'_1 b''_2 - b'_2 b''_1)(b'_3 b''_1 - b'_1 b''_3)\, t_1^2 = b''^2_1 U' - b''_1 b'_1 W + b'^2_1 U'' = \omega_1^2 ,\\
&(b'_2 b''_3 - b'_3 b''_2)(b'_1 b''_2 - b'_2 b''_1)\, t_2^2 = b''^2_2 U' - b''_2 b'_2 W + b'^2_2 U'' = \omega_2^2 ,\\
&(b'_3 b''_1 - b'_1 b''_3)(b'_2 b''_3 - b'_3 b''_2)\, t_3^2 = b''^2_3 U' - b''_3 b'_3 W + b'^2_3 U'' = \omega_3^2 ,
\end{aligned}
$$

sicchè Ω_i ed ω_i saranno funzioni lineari delle variabili S_i ed s_i, e ponendo successivamente nelle identità (4) due di queste variabili eguali a zero, si otterranno immediatamente i valori dei coefficienti Λ_{ij} o λ_{ij} della trasformazione (1).

Le equazioni

(5) $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, o $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$,

determinano rispettivamente gli elementi s o S della terna (xyz, XYZ) coniugata comune rispetto alle coppie di quadriche congiunte (U', u'), (U'', u'').

Gli elementi comuni alle quadriche (V', V''), o (v', v''), essendo dati dalle equazioni

$$
\frac{t_1^2}{B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2} = \frac{t_2^2}{B'_3 B''_1 - B'_1 B''_3} = \frac{t_3^2}{B'_1 B''_2 - B'_2 B''_1} ,
$$

$$
\frac{T_1^2}{b'_2 b''_3 - b'_3 b''_2} = \frac{T_2^2}{b'_3 b''_1 - b'_1 b''_3} = \frac{T_3^2}{b'_1 b''_2 - b'_2 b''_1} ,
$$

osservando che in generale tra le variabili t_i, T_i, s_i, S_i si ha l'una o l'altra delle identità

$$
t_1 T_1 + t_2 T_2 + t_3 T_3 = \Lambda (s_1 S_1 + s_2 S_2 + s_3 S_3) , \quad T_1 t_1 + T_2 t_2 + T_3 t_3 = \lambda (S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3) ,
$$

secondo che si riguardano Λ_{ij} o λ_{ij} come gli elementi reciproci del determinante Λ o λ, indicando con K e k coefficienti arbitrarii, si avranno

per gli elementi q o Q comuni alle quadriche (U', U'') o (u', u'') le identità

$$(6)\quad \begin{aligned} K(s_1 S_1 + s_2 S_2 + s_3 S_3) &= (B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2)\Omega_1 + (B'_3 B''_1 - B'_1 B''_3)\Omega_2 + (B'_1 B''_2 - B'_2 B''_1)\Omega_3 \,, \\ k(S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3) &= (b'_2 b''_3 - b'_3 b''_2)\omega_1 + (b'_3 b''_1 - b'_1 b''_3)\omega_2 + (b'_1 b''_2 - b'_2 b''_1)\omega_3 \,, \end{aligned}$$

e ponendo in queste successivamente eguali a zero due delle variabili S_i o s_i, si otterranno i rapporti $s_1 : s_2 : s_3$ o $S_1 : S_2 : S_3$ tra le coordinate degli elementi q o Q, dopo di aver fissato nei quattro modi possibili i segni delle quantità Ω_i o ω_i.

Essendo (q_1, q_2, q_3, q_4) o (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) la quaterna degli elementi q o Q comuni alle quadriche (U', U'') o (u', u''), le equazioni

$$(7)\quad \begin{aligned} &\frac{U'}{B'_1} = \frac{U''}{B''_1} \,, \quad \frac{U'}{B'_2} = \frac{U''}{B''_2} \,, \quad \frac{U'}{B'_3} = \frac{U''}{B''_3} \,, \\ &\frac{u'}{b'_1} = \frac{u''}{b''_1} \,, \quad \frac{u'}{b'_2} = \frac{u''}{b''_2} \,, \quad \frac{u'}{b'_3} = \frac{u''}{b''_3} \,, \end{aligned}$$

determineranno rispettivamente le coppic di elomenti

$$(q_1 q_4 , q_2 q_3), (q_2 q_4 , q_3 q_1), (q_3 q_4 , q_1 q_2) \,; \; (Q_1 Q_4 , Q_2 Q_3), (Q_2 Q_4 , Q_3 Q_1), (Q_3 Q_4 , Q_1 Q_2) \,.$$

Le radici delle equazioni (3) saranno insieme tutte e tre reali e diseguali, due eguali, o due immaginerie, secondo che i discriminanti di quelle equazioni sono negativi, nulli o positivi. Allorchè le radici sono tutte e tre reali la terna (xyz, XYZ) sarà reale, e gli elementi q o Q potranno essero o tutti e quettro reali, o tutti o quattro immaginarii; si avrà l'uno, o pure l'eltro caso, secondo che i tre binomii

$$B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2 \,, \quad B'_3 B''_1 - B'_1 B''_3 \,, \quad B'_1 B''_2 - B'_2 B''_1 \,,$$

o pure

$$b'_2 b''_3 - b'_3 b''_2 \,, \quad b'_3 b''_1 - b'_1 b''_3 \,, \quad b'_1 b''_2 - b'_2 b''_1 \,,$$

saranno tutti e tre positivi o negativi, o pure uno di essi è positivo o negativo, e gli altri due sono negativi o positivi.

Se l'equazioni (3) henno due radioi immaginarie, la terna (xyz, XYZ) avrà reale un solo elemento s ed un solo elemento S, e tra gli elementi q o Q due saranno reali, e gli altri due immaginarii.

Supponiamo finalmente ohe l'equazioni (3) abbiano due radici eguali, onde le condizioni

$$27\Delta'^2\Delta''^2-18\Delta'\Delta''\Psi'\Psi''+4\Delta'\Psi'^3+4\Delta''\Psi''^3-\Psi'^2\Psi''^2=0\,,$$
$$27\delta'^2\delta''^2-18\delta'\delta''\psi'\psi''+4\delta'\psi'^3+4\delta''\psi''^3-\psi'^2\psi''^2=0\,,$$

e poniamo

$$\frac{B'_1}{B''_1}=\frac{B'_2}{B''_2}=\frac{B'}{B''}\,,\quad \text{e quindi}\quad \frac{b'_1}{b''_1}=\frac{b'_2}{b''_2}=\frac{b'}{b''}\,;$$

la trasformazione (1) diverrà illusoria; in tal oaso l'equazione

$$(8)\qquad B''^2u'-B''B'w+B'^2u''=0\,,\quad \text{o}\quad b''^2U'-b''b'W+b'^2U''=0\,,$$

che ha per primo membro un quadrato esatto, determinerà i due elementi q o Q comuni ad (U', U'') o (u', u'') e coincidenti tra loro in m o M; se poi le equazioni (8) sono verificate identicamente, e quindi si annullano i determinanti tratti dalle due matrici rettangolari formate con i coefficienti delle quadriche (u', w, u'') o (U', W, U''), (condizioni che equivalgono a due sole relazioni distinte), gli altri due elementi q o Q comuni ad (U', U''), o (u', u'') saranno anche tra loro coincidenti in n o N; allora l'equazione

$$(9)\qquad B''^2_1u'-B''_1B'_1w+B'^2_1u''=0\,,\quad \text{o}\quad b''^2_1U'-b''_1b'_1W+b'^2_1U''=0\,,$$

che ha pure per primo membro un quadrato esatto, determinerà, estraendone la radice, l'elemonto MN o mn.

Se l'equazioni (3) hanno tutte e tre lo radici eguali, onde le condizioni

$$\frac{3\Delta'}{\Psi''}=\frac{\Psi''}{\Psi'}=\frac{\Psi'}{3\Delta''}=-\frac{B''}{B'}\,,\;\frac{3\delta'}{\psi''}=\frac{\psi''}{\psi'}=\frac{\psi'}{3\delta''}=-\frac{b''}{b'}\,,$$

l'equazione (8) determinerà, estraendo la radice quadrata dal suo primo membro, l'elemento s o S nel quale coincidono tre degli elementi q o Q comuni ad (U', U'') o (u', u''); se poi l'equazione (8) è verificata identicamente, i quattro elementi q o Q saranno tutti tra loro coincidenti.

6. *Applicazione alle superficie coniche ed alle linee di 2° grado.* Supponiamo che gli elementi s ed S del sistema ternario siano rappresentati geometricamente da una retta e da un piano che passano per un punto fisso; le quadriche saranno allora rappresentate da superficie coniche di

2° grado, o ciò che torna lo stesso da *coniche sferiche*. Sia una prima coppia di quadriche congiunte (U, u) espressa da

$$U=(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)^2\,, \qquad u=(a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3)^2\,,$$

e prendiamo per seconda coppia di quadriche congiunte (U', u') quella che determina l'*Assoluto* del sistema, vale a dire poniamo *)

$$U'=s_1^2+s_2^2+s_3^2+2s_2s_3\cos\lambda_1+2s_3s_1\cos\lambda_2+2s_1s_2\cos\lambda_3\,,$$
$$u'=S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_2S_3\cos\Lambda_1+2S_3S_1\cos\Lambda_2+2S_1S_2\cos\Lambda_3\,,$$

in cui λ_i e Λ_i dinotano le *parti* della terna fondamentale. Osservando che le attuali forme congiunte di U' ed u' sono rispettivamente

$$(u')=u'(S_1\operatorname{sen}\lambda_1\,,\,S_2\operatorname{sen}\lambda_2\,,\,S_3\operatorname{sen}\lambda_3)\,,\quad (U')=U'(s_1\operatorname{sen}\Lambda_1\,,\,s_2\operatorname{sen}\Lambda_2\,,\,s_3\operatorname{sen}\Lambda_3)\,,$$

gl'invarianti del sistema (U, U') o (u, u') saranno

$$\Psi'=a_{11}+a_{22}+o_{33}+2a_{23}\cos\lambda_1+2a_{31}\cos\lambda_2+2a_{12}\cos\lambda_3\,,$$
$$\Psi=A_{11}\operatorname{sen}^2\lambda_1+A_{22}\operatorname{sen}^2\lambda_2+A_{33}\operatorname{sen}^2\lambda_3$$
$$+2A_{23}\operatorname{sen}\lambda_2\operatorname{sen}\lambda_3\cos\Lambda_1+2A_{31}\operatorname{sen}\lambda_3\operatorname{sen}\lambda_1\cos\Lambda_2+2A_{12}\operatorname{sen}\lambda_1\operatorname{sen}\lambda_2\cos\Lambda_3\,,$$
$$\Delta'=1-\cos^2\lambda_1-\cos^2\lambda_2-\cos^2\lambda_3+2\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3\,;$$

(1) o

$$\psi'=A_{11}+A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos\Lambda_1+2A_{31}\cos\Lambda_2+2A_{12}\cos\Lambda_3\,,$$
$$\psi=a_{11}\operatorname{sen}^2\Lambda_1+a_{22}\operatorname{sen}^2\Lambda_2+a_{33}\operatorname{sen}^2\Lambda_3$$
$$+2a_{23}\operatorname{sen}\Lambda_2\operatorname{sen}\Lambda_3\cos\lambda_1+2a_{31}\operatorname{sen}\Lambda_3\operatorname{sen}\Lambda_1\cos\lambda_2+2a_{12}\operatorname{sen}\Lambda_1\operatorname{sen}\Lambda_2\cos\lambda_3\,,$$
$$\delta'=1-\cos^2\Lambda_1-\cos^2\Lambda_2-\cos^2\Lambda_3+2\cos\Lambda_1\cos\Lambda_2\cos\Lambda_3\,,$$

dovendosi riguardare, nel primo sistema di queste relazioni, $u, (u')$ come le forme congiunte di U, U', e nel secondo sistema $U, (U')$ come le forme congiunte di u, u'.

Siano $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ o $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ i tre valori di σ o Σ ricavati dall'una o l'altra delle equazioni

(2)
$$\Delta-\Psi'\sigma+\Psi\sigma^2-\Delta'\sigma^3=0\,,$$
$$\delta-\psi'\Sigma+\psi\Sigma^2-\delta'\Sigma^3=0\,,$$

*) Memoria 1ª *sulle forme ternarie quadratiche*. Atti dell'Accademia vol. III.

ed essendo

$$(3)\quad \begin{aligned} w &= (A_{22}+A_{33}-2A_{23}\cos\lambda_1)S_1^2+\ldots+2(A_{12}\cos\lambda_2+A_{31}\cos\lambda_3-A_{11}\cos\lambda_1-A_{23})S_2S_3+\ldots \\ W &= (a_{22}+a_{33}-2a_{23}\cos\Lambda_1)s_1^2+\ldots+2(a_{12}\cos\Lambda_2+a_{31}\cos\Lambda_3-a_{11}\cos\Lambda_1-a_{23})s_2s_3+\ldots \end{aligned}$$

si ponga

$$(4)\qquad \Omega_i^2 = u-\sigma_i w+\sigma_i^2(u')\,,\qquad \omega_i^2 = U-\Sigma_i W+\Sigma_i^2(U')\,.$$

Essendo l'Assoluto del sistema una quadrica immaginaria, i quattro elementi q o Q comuni alle quadriche (U, U'), o (u, u'), saranno tutti immaginarii, e quindi la terna (xyz, XYZ) coniugata comune rispetto a quelle due quadriche sarà reale, ed evidentemente *ortogonale*; gli elementi di questa terna sono gli *elementi centrali o di simmetria* delle quadriche congiunte (U, u), (*diametri e piani diametrali principali* della superficie conica di 2° grado, *centri ed assi* della conica sferica).

L'equazioni

$$(5)\qquad \Omega_1=0\,,\ \Omega_2=0\,,\ \Omega_3=0\,,\qquad \text{o}\qquad \omega_1=0\,,\ \omega_2=0\,,\ \omega_3=0\,,$$

determinano rispettivamente gli elementi s o S della terna (xyz, XYZ).

L'equazioni

$$(6)\quad \begin{aligned} &U-\sigma_1(U')=0\,,\quad U-\sigma_2(U')=0\,,\quad U-\sigma_3(U')=0\,, \\ \text{o}\quad &u-\Sigma_1(u')=0\,,\quad u-\Sigma_2(u')=0\,,\quad u-\Sigma_3(u')=0\,, \end{aligned}$$

determineranno rispettivamente coppie di elementi S o s tali che le coppie di elementi s o S, coniugati armonici rispetto ad U o u ed appartenenti ad un elemento S o s di quelle coppie (6), sono coppie *ortogonali*. Gli elementi delle coppie (6) si diranno gli *elementi ciclici o focali* delle quadriche congiunte (U, u), (*piani ciclici e rette focali* della superficie conica di 2° grado, *archi ciclici e fuochi* della conica sferica). Delle tre coppie (6) una sola è reale, e le altre due sono immaginarie.

Le quadriche della serie definita da (U, U'), o (u, u'), avendo evidentemente gli stessi elementi ciclici o focali, si dicono quadriche *omocicliche* o *omofocali;* le loro proprietà si deducono agevolmente da quelle delle quadriche delle serie definite da due coppie di quadriche congiunte qualunque.

La considerazione degli invarianti del sistema (U, U') o (u, u') conduce a stabilire le *varietà* delle quadriche; le varietà *fondamentali* sono quelle

corrispondenti alle condizioni $\Psi'=0$, o $\Psi=0$, (supposto essere u, (u') le forme congiunte di $U, U')$, o ciò che torna lo stesso corrispondonti alle condizioni $\psi=0$, o $\psi'=0$, (supposto essere U, (U') le forme congiunte di u, u'). Nel primo caso alla quadrica u possono appartenore terne *ortogonali* di elementi S, e nel secondo alla quadrica U possono appartenere terne *ortogonali* di elementi s.

Allorchè si annullano i determinanti tratti dalle matrici formate con i coefficienti delle quadriche $\{u, w, (u')\}$ o $\{U, W, (U')\}$, (condizioni che equivalgono a duo sole relazioni distinte) le quadriche congiunte (U, u) avranno un doppio contatto con l'Assoluto, e si diranno quadriche di *rotazione o circolari*, (superficie conica di *rotazione*, *circolo minore* della sfera).

La quadrica w o W è tale che ogni suo elemento S o s determina in U o u una coppia *ortogonale* di elementi s o S.

Supponiamo ora che gli elementi s ed S del sistema ternario siano rappresentati rispettivamente da un punto e da una retta giacenti in un piano fisso; le quadriche saranno allora rappresentate da linee di 2° grado, o *coniche* semplicemente dette. Essendo una prima coppia di quadriche congiunte (u, U) espreasa da

$$u=(a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3)^2\,,\qquad U=(A_1s_1+A_2s_2+A_3s_3)^2\,,$$

prendiamo per seconda coppia di quadriche congiunto (u', U') quella ohe determina *l'Assoluto* del sistema, valo a dire poniamo

$$u'=S_1^2+S_2^2+S_3^2+2S_2S_3\cos A_1+2S_3S_1\cos A_2+2S_1S_2\cos A_3\,,$$
$$U'=(s_1 \operatorname{sen} A_1+s_2 \operatorname{sen} A_2+s_3 \operatorname{sen} A_3)^2\,,$$

in cui A_i dinotano gli angoli della terna fondamentale, tra i quali si ha la relazione

$$A_1+A_2+A_3=2\pi\,.$$

Si avrà pel sistema di quadriche (u, u')

$$\psi'=A_{11}+A_{22}+A_{33}+2A_{23}\cos A_1+2A_{31}\cos A_2+2A_{12}\cos A_3\,,$$

$$\psi=a_{11}\operatorname{sen}^2 A_1+a_{22}\operatorname{sen}^2 A_2+a_{33}\operatorname{sen}^2 A_3 \tag{7}$$
$$+2a_{23}\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3+2a_{31}\operatorname{sen} A_3 \operatorname{sen} A_1+2a_{12}\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2\,,$$

$$\delta'=1-\cos^2 A_1-\cos^2 A_2-\cos^2 A_3+2\cos A_1\cos A_2\cos A_3=0\,,$$

in oui si riguardano (U, U') come le forme congiunte di (u, u').

Siano (Σ_1, Σ_2) i duo valori di Σ rioavati dall'equazione

(8) $$\vartheta - \psi'\Sigma + \psi\Sigma^2 = 0,$$

e sia $\sigma = \frac{\vartheta}{\psi}$; inoltre, essendo

$$W = (a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos A_1)s_1^2 + \ldots + 2(a_{23}\cos A_2 + a_{31}\cos A_3 - a_{12}\cos A_1 - a_{33})s_2 s_3 + \ldots$$

(9) $$w = A_{22}\,\text{sen}^2 A_3 + A_{33}\,\text{sen}^2 A_2 - 2A_{23}\,\text{sen}\,A_2\,\text{sen}\,A_3)S_1^2 + \ldots$$

$$+ 2(A_{31}\,\text{sen}\,A_1\,\text{sen}\,A_2 + A_{12}\,\text{sen}\,A_1\,\text{sen}\,A_3 - A_{11}\,\text{sen}\,A_2\,\text{sen}\,A_3 - A_{23}\,\text{sen}^2 A_1)S_2 S_3 + \ldots$$

si ponga

(10) $$\omega_1^2 = U - \Sigma_1 W + \Sigma_1^2 U', \qquad \omega_2^2 = U - \Sigma_2 W + \Sigma_2^2 U',$$
$$\Omega^2 = u - \sigma w + \sigma^2 u'.$$

Essendo l'Assoluto del sistema una coppia di elementi s immaginarii all'infinito, i quattro elementi Q comuni ad (u, u') saranno tutti immaginarii, e quindi la terna (X, Y, Z) coniugata comune rispetto ad (u, u') sarà reale; questa terna avrà evidentemente un elemento, Z, all'infinito, e gli altri due elementi (X, Y) costituiranno una coppia *ortogonale*, questi sono gli *elementi di simmetria* delle quadriche congiunte (u, U), (*diametri principali* o *assi* della oonica), e l'elemento XY, armonico di Z rispetto ad u, ne è il *centro*.

Le equazioni $\omega_1 = 0$ ed $\omega_2 = 0$, determinano gli assi X ed Y della conica; li suo centro s sarà poi dato dall'equazione $\Omega = 0$, o più semplicemente dalle formole

(11) $$\frac{a_{11}\,\text{sen}\,A_1 + a_{12}\,\text{sen}\,A_2 + a_{13}\,\text{sen}\,A_3}{s_1} = \frac{a_{21}\,\text{sen}\,A_1 + a_{22}\,\text{sen}\,A_2 + a_{23}\,\text{sen}\,A_3}{s_2}$$
$$= \frac{a_{31}\,\text{sen}\,A_1 + a_{32}\,\text{sen}\,A_2 + a_{33}\,\text{sen}\,A_3}{s_3}.$$

Le equazioni

(12) $$u - \Sigma_1 u' = 0, \qquad u - \Sigma_2 u' = 0,$$
$$U - \sigma U' = 0,$$

determinano rispettivamente le coppie degli *elementi focali* della quadrica u (*fuochi* della conica), una delle quali è reale, e l'altra immaginaria, ed una oppia di elementi S congiunti alla quadrica U nei suoi elementi s all'infinito (*asintoti* della conica).

Le quadriche della serie definita da (u, u') o (U, U') avendo evidentemente gli stessi elementi focali, o gli stessi asintoti, si dicono quadriche *omofocali* o *omotetiche*.

Allorchè $\psi'=0$ potranno appartenere ad U terne di elementi s ortogonali, e quindi gli asintoti della conica saranno anche ortogonali (la conica è *iperbole equilatera*); se poi $\psi=0$, potranno appartenere ad u terne di elementi S ortogonali, quindi la conica toccherà la retta all'infinito, o ciò che vale lo stesso il centro della conica cadrà a distanza infinita, (la conica è *parabola*).

Allorchè si annullano i determinanti tratti dalla matrice rettangolare formata con i coefficienti delle quadriche (U, W, U'), (condizioni che equivalgono a due sole relazioni distinte), le quadriche congiunte (u, U), hanno un doppio contatto con l'Assoluto, e la conica dicesi *circolo*; essa passa evidentemente per i due punti immaginarii all'infinito determinati dall'Assoluto, e quei punti sono detti perciò *punti ciclici all'infinito*.

La quadrica W è tale che le tangenti di u condotte da un suo punto qualunque costituiscono una coppia ortogonale; questa quadrica è un circolo. La quadrica w poi determina la coppia dei punti di U situati all'infinito.

Allorchè $\psi=0$, la coppia dei fuochi immaginarii, ed uno dei fuochi reali cadono all'infinito; l'altro fuoco reale (fuoco della parabola) avrà per sue coordinate le espressioni

$$(13)\qquad \frac{\psi' a_{11}-\delta}{a_{11}\,\mathrm{sen}\,A_1+a_{12}\,\mathrm{sen}\,A_2+a_{13}\,\mathrm{sen}\,A_3}\,,\quad \frac{\psi' a_{22}-\delta}{a_{21}\,\mathrm{sen}\,A_1+a_{22}\,\mathrm{sen}\,A_2+a_{23}\,\mathrm{sen}\,A_3}\,,\quad \frac{\psi' a_{33}-\delta}{a_{31}\,\mathrm{sen}\,A_1+a_{32}\,\mathrm{sen}\,A_2+a_{33}\,\mathrm{sen}\,A_3}\,;$$

in tal caso la conica W si ridurrà ad una coppia di rette, una delle quali cade a distanza infinita; l'altra, (*direttrice* della parabola), è determinata dall'equazione

$$(14)\qquad \frac{a_{22}+a_{33}-2a_{23}\cos A_1}{\mathrm{sen}\,A_1}\,s_1+\frac{a_{33}+a_{11}-2a_{31}\cos A_2}{\mathrm{sen}\,A_2}\,s_2+\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos A_3}{\mathrm{sen}\,A_3}\,s_3=0\,.$$

Questa retta è rispetto alla parabola la retta armonica del suo fuoco.

Nota — L'imperfetta corrispondenza, che si osserva nei risultati precedenti, tra le proprietà delle coniche sferiche e quelle delle coniche piane, tiene al concetto particolare del piano, relativamente ai suoi punti all'infinito, e proprio alla Geometria euclidiana; nella Geometria non-euclidiana di Lobatschewsky e Bolyai si ha una perfetta *dualità* tra le proprietà dei sistemi di rette e di piani concorrenti in un punto, e quella dei sistemi di rette e di punti giacenti in un piano, come cercherò di mostrare in altra occasione.